

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Wiskundige Analyse 2
Afdeling Wiskunde	Hertentamen
Vrije Universiteit	03-07-2013, 08:45-11:30

Gebruik van rekenmachines, laptops, formulebladen, boeken etc. is **niet** toegestaan. Motiveer al je antwoorden zorgvuldig en schrijf duidelijk. Succes!

1. **(20 punten)** Zij $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $A \subset \mathbb{R}^d$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$(i) \ x \in A \Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad (ii) \ f(x) < 0 \Rightarrow x \in A.$$

Laat zien:

$$x \in \partial A \Rightarrow f(x) = 0.$$

2. **(30 punten)** Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x - y)^2 \sin \frac{1}{x - y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

- (a) **(15 punten)** Bewijs dat f differentieerbaar is in $(0, 0)$.
 (b) **(15 punten)** Bewijs dat f_x in punten van de lijn $y = x$ niet continu is.
3. **(30 punten)** Zij $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door
- $$F(x, y) = x + y^2 + y \cos y.$$
- (a) **(10 punten)** Laat zien: er is een $\delta > 0$ en een differentieerbare functie $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat $g(0) = 0$ en $F(x, g(x)) = 0$.
 (b) **(10 punten)** Bepaal $g'(0)$.
 (c) **(10 punten)** Geef een vergelijking voor de raaklijn aan de niveaulijn van F door $(0, 0)$.
4. **(20 punten)** Zij $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $g(x, y) = (4x + 3y, 2x - y)$. Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat $\nabla f(1, 3) = (0, 2)$. Zij $h = f \circ g$. Bepaal $\nabla h(1, -1)$.
5. **(30 punten)** Voor vaste getallen $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq 1$, zij $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{\alpha x + y}{\beta + 2}, \frac{\beta x + 2y}{\alpha - 1} \right).$$

Zij $A \subset \mathbb{R}^2$ een Jordan gebied.

- (a) **(15 punten)** Laat zien dat $\Phi(A)$ een Jordan gebied is.
 (b) **(15 punten)** Vind α en β zodanig dat A en $\Phi(A)$ dezelfde volume hebben.

Z.O.Z.

6. **(30 punten)** Zij S het gebied begrensd door de oppervlakken $z = x^2 + y^2$ en $z = 8 - x^2 - y^2$.

(a) **(15 punten)** Bewijs dat S projecteerbaar is.

(b) **(15 punten)** Bereken het volume van S .

7. **(30 punten)** Voor $a, b > 0$ zij E de ellips gegeven door $E = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Gebruik de transformatie $(x, y) = (au \cos v, bu \sin v)$ om de integraal

$$\iint_E \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dA$$

te berekenen. Beargumenteer je antwoord!

Eindcijfer:

$$\frac{1}{20} \cdot \# \text{ punten} + 1$$