

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Wiskundige Analyse 2
Afdeling Wiskunde	Eerste deeltentamen
Vrije Universiteit	28-03-2012, 15:15-17:15

Gebruik van rekenmachines, laptops, formulebladen, boeken etc. is **niet** toegestaan. Motiveer al je antwoorden zorgvuldig en schrijf duidelijk. Succes!

1. Een *Cauchy-rij* $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ is een rij die voldoet aan de volgende voorwaarde: voor elk reëel getal $\epsilon > 0$ bestaat er een natuurlijk getal N zodanig dat $\|x_l - x_m\| < \epsilon$ als $l, m \geq N$. Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ en $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ een uniform continue functie. Laat zien: als $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is in A , dan is $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$.
2. Laat zien: als A en B twee compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn, dan zijn de doorsnede $A \cap B$ en de vereniging $A \cup B$ van A en B ook compact.
3. Aan welke voorwaarden moeten $a, b, c \in \mathbb{R}$ voldoen opdat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}$$

bestaat?

4. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is als volgt gedefinieerd:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + 1 \\ \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

voor $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ga na of f continu is in $(0, 0)$.

5. Bereken

$$\frac{d}{dx} \int_1^2 \sqrt{x^3 + y^3 - 8} dy$$

in $x = 2$.

6. Beschouw de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) Bereken $f_x(0, 0)$ en $f_y(0, 0)$.
- (ii) Bereken $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (iii) Ga na of f differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$.

7. De functies $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd als $f(x, y) = (x^2 + y^2, \sin(xy))$ en $g(x, y) = (xy, e^y)$. Bereken $D(f \circ g)(x, y)$.