

Normering: 1-6:15

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

Let op: Motiveer Uw antwoord (Ongemotiveerde antwoorden worden fout gerekend!).

1. Zij $E \subset \mathbb{R}^n$. De *translatie* van E met $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is the set $\mathbf{x} + E = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \text{ met } \mathbf{z} \in E\}$. Laat zien dat E een Jordan gebied is dan en slechts dan als $\mathbf{x} + E$ een Jordan gebied is en dat in dat geval $\text{Vol}(E) = \text{Vol}(\mathbf{x} + E)$.
2. Zij E een open Jordan gebied in $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in E$. Als $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar is op E en continu in $\mathbf{x}$, laat dan zien dat

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B_r(\mathbf{x}))} \int_{B_r(\mathbf{x})} f dV = f(\mathbf{x}).$$

3. Bereken het volume van het gebied $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door: E ligt onder het vlak $z = x + y$ en boven het gebied in het xy -vlak begrensd door de krommen $x = \sqrt{y/2}$, $x = 2\sqrt{y}$, $x + y = 3$.
4. $D \subset \mathbb{R}^2$ is begrensd door $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ en $x^2 - y^2 = 4$. Bereken $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.
5. Zij

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Bereken de Fourier coëfficiënten van f en bewijs dat

$$(S_{2N}f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2Nt}{\sin t} dt$$

voor $x \in [-\pi, \pi]$ en $N \in \mathbb{N}$.

Z.O.Z.

6. Zij f integreerbaar op $[-\pi, \pi]$ en $L \in \mathbb{R}$.

(a) Bewijs dat als $(\sigma_N f)(x_0) \rightarrow L$ voor $N \rightarrow \infty$ en als $(Sf)(x_0)$ convergeert, dan $(S_N f)(x_0) \rightarrow L$.

(b) Bewijs dat

$$\sin \sqrt{2}\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4 \sin \sqrt{2}\pi}{2 - k^2} \cos kx$$

uniform convergeert naar $\sqrt{2}\pi \cos \sqrt{2}x$ op kompakte deelverzamelingen van $(0, 2\pi)$.