

Normering: 1-6:15

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

Let op: Motiveer Uw antwoord (Ongemotiveerde antwoorden worden fout gerekend!).

1. Laat zien, gebruikmakend van de definitie, dat de volgende limiet bestaat:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\log(k+1) - \log(k), 2^{-k}).$$

2. Laat zien dat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

continu is op $\mathbb{R}^2$ en eerste orde partiële afgeleiden heeft, maar dat f niet differentieerbaar is in $(0, 0)$.

3. Bepaal het raak-hypervlak aan $w = xy + \sin(z)$ in $(x, y, z, w) = (1, 0, \pi/2, 1)$.
4. Zij $p \in \mathbb{N}$, V een open verzameling in $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in V$. Gegeven is een C^1 functie $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Als $L(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \subset V$ en $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, laat zien dat

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} D^{(p)} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}; \mathbf{h}) dt.$$

Hierbij mag het analoge resultaat voor functies op $\mathbb{R}$ gebruikt worden.

5. Gegeven getallen $x_0, y_0, u_0, v_0, s_0, t_0$, alle ongelijk nul, die voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned}u^2 + sx + ty &= 0 \\v^2 + tx + sy &= 0 \\2s^2x + 2t^2y - 1 &= 0 \\s^2x - t^2y &= 0,\end{aligned}$$

bewijs dat er functies $u(x, y), v(x, y), s(x, y), t(x, y)$ en een open bol B bestaan, met $(x_0, y_0) \in B$, zo dat u, v, s, t continu differentieerbaar zijn en voldoen aan de bovenstaande vergelijkingen, zo dat $u(x_0, y_0) = u_0, v(x_0, y_0) = v_0, s(x_0, y_0) = s_0, t(x_0, y_0) = t_0$.

6. Veronderstel dat V open is in $\mathbb{R}^2$, dat $(a, b) \in V$, dat $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ een tweede orde afgeleide heeft op V met $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Als de tweede orde partiële afgeleiden van f continu zijn in (a, b) , laat dan zien dat (a, b) een zadelpunt is als $f_{xx}(a, b) = f_{yy}(a, b) = 0$ en $f_{xy}(a, b) \neq 0$.