

Bij dit tentamen mag geen gebruik worden gemaakt van een rekenmachine, boek, dictaat of enig ander hulpmiddel. Het tentamen duurt twee uur. Er zijn vijf opgaven.

1. De functie $f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ x, & y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Laat zien dat de integraal $\int_R f(x, y) \, dx dy$ niet bestaat.

2. Gegeven is de functie $f : [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}.$$

Laat zien dat $\int_R f(x, y) \, dx dy = \frac{1}{3} + 3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$.

(Hints: gebruik Fubini, deel het gebied op, gebruik een handige goniometrische substitutie. Als je dat laatste doet dan kun je gebruik maken van $\cos^4 t = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t)$ om de resulterende integraal makkelijk uit te rekenen.)

3. Laat E het gebied zijn binnen de cirkel $x^2 + y^2 = y$.

a. Omschrijf E in poolcoördinaten.

b. Bereken $\int_E \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$.

4. Gegeven is de 2π -periodiek functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } -\pi \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{als } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

a. Bepaal de Fourierreeks van f .

b. Formuleer de stelling van Dirichlet-Jordan.

c. Voor welke punten x convergeert de Fourierreeks van f naar $f(x)$?

d. Wat is de som van de Fourierreeks voor $x = 0$?

Z.O.Z.

5. Laat $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Definieer

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Laat a_n en b_n de gebruikelijke Fouriercoëfficiënten van f zijn.

- Laat zien dat $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
- Laat nu $f(x) = e^x$. Bereken c_n , en gebruik dat om de a_n en b_n voor alle $n = 0, 1, 2, \dots$ te bepalen.
- Gebruik een geschikte waarde van x om te laten zien dat

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Normering

1:4	2:5	3a:2 b:3	4a:2 b:2 c:2 d:1	5a:2 b:2 c:2
-----	-----	-------------	---------------------------	--------------------

Cijfer is $1 + \frac{\text{aantal punten}}{3}$