

Bij dit tentamen mag geen gebruik worden gemaakt van een rekenmachine, boek, dictaat of enig ander hulpmiddel. Het tentamen duurt twee uur. Er zijn vijf opgaven.

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a. Laat zien dat $|\sin t| \leq |t|$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.
- b. Bewijs met een ε - δ argument dat f continu is in het punt $(0, 0)$.

2. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a. Geef, voor een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, en een punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ de definitie van de richtingsafgeleide in de richting van de vector $\mathbf{u}$.
- b. Laat zien dat voor de gegeven functie f alle richtingsafgeleiden in het punt $(0, 0)$ bestaan, maar dat f niet differentieerbaar is in $(0, 0)$. (Hint: maak onderscheid tussen $x \neq 0$ en $x = 0$).

3.

- a. Van een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is gegeven dat er een $M > 0$ bestaat zo dat $\|f(x)\| \leq M\|x\|^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat $Df(\mathbf{0}) = 0_{n \times m}$ (dus dat de afgeleide de n bij m nulmatrix is).
- b. Van een functie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is gegeven dat er een matrix $n \times m$ matrix A bestaat zo dat $g(x) = Ax + f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$. Neem verder aan dat er een getal $M > 0$ bestaat zo dat f voldoet aan de voorwaarde uit onderdeel a. Bewijs dat $Df(\mathbf{0}) = A$.

4. Gegeven is de functie $f(x, y) = ((x-1)^2 + y^2 - 1)xy$.

- a. Schets het tekenverloop van f .
- b. Wat volgt daaruit voor de punten $(0, 0)$ en $(2, 0)$?

- c. Bepaal de stationaire punten van f . Wat kun je op grond van het a onderdeel zeggen over de twee stationaire punten die niet de punten uit het b onderdeel zijn?
- d. Ga na dat je de conclusie uit het b onderdeel met betrekking tot het punt $(0, 0)$ niet kunt trekken op grond van de waarde van de tweede afgeleide.

5.

- a. Formuleer de impliciete functiestelling.
- b. De functie $F : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} xy + z^2 + w^2 \\ x + y + zw \end{pmatrix}.$$

Verder is gegeven de verzameling $V = \{(x, y, z, w) \mid F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Laat zien dat in een omgeving van het punt $(0, 0, 2, 1)$ men (z, w) lokaal als functie van (x, y) kan schrijven als (x, y, z, w) op V liggen. Noem die functie $(z, w) = g(x, y)$. Bepaal dan ook $g'(0, 0)$.

Normering

1a:2	2a:2	3a:3	4a:2	5a:2
b:3	b:3	b:3	b:1	b:3
			c:1	
			d:2	

Cijfer is $1 + \frac{\text{aantal punten}}{3}$