

Opg. 1. (30 punten)

Voor $n = 1, 2, 3, \dots$ zijn gegeven de continue functies $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, met $u_n(0) = \sin n$ en

$$u_n(x) = \sin n + \frac{x}{n} \sin(n \log x), \quad x \neq 0.$$

- a. Toon aan dat $|u_n(x) - u_n(y)| \leq 2|x - y|$ voor alle $x, y \in [0, 1]$ en $n \geq 1$.
- b. Toon aan dat de u_n uniform begrensd en uniform equicontinu zijn.
- c. Toon aan dat er een rij natuurlijke getallen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ bestaat met de eigenschap dat de rij $u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}, \dots$ uniform convergeert.

Opgave 2. (40 punten)

Laat $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ constanten zijn en neem aan dat $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een *begrensde, Riemann-integreerbare* functie is. Beschouw de integraaloperator

$$(Ku)(x) = 1 + \alpha \int_a^b u(y) \sin(x + y) \, dy.$$

- a. Stel $|u(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$. Bewijs dat

$$|(Ku)(x_1) - (Ku)(x_2)| \leq |\alpha| |b - a| M |x_1 - x_2|.$$

Bewijs dat dit impliceert dat Ku uniform continu is.

We noteren vanaf nu met $C^0[a, b]$ de ruimte van continue functies $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, voorzien van de supremumnorm

$$|u|_{\text{sup}} := \sup_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

We merken op dat onderdeel a. impliceert dat de operator K de ruimte $C^0[a, b]$ in zichzelf afbeeldt.

- b. Laat $u, v \in C^0[a, b]$. Toon aan dat

$$|Ku - Kv|_{\text{sup}} \leq |\alpha| |b - a| |u - v|_{\text{sup}}.$$

- c. Neem nu aan dat $|\alpha| |b - a| < 1$. Bewijs dat K dan een contractie is in $C^0[a, b]$.

- d. Neem wederom aan dat $|\alpha| |b - a| < 1$. Bewijs dat de integraalvergelijking

$$u(x) = 1 + \alpha \int_a^b u(y) \sin(x + y) \, dy.$$

een unieke oplossing $u \in C^0[a, b]$ heeft.

Opg. 3. (Analytisch gladmaken: 30 punten)

We brengen in herinnering dat voor willekeurige parameter $y \in \mathbb{R}$ de “complexe lijnintegraal” $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}} dx$ gelijk is aan $\sqrt{2\pi}$.

a. Voor $\varepsilon > 0$, laat de functie $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$. Bewijs dat g_ε voldoet aan de eigenschappen van een approximatie-identiteit:

$$g_\varepsilon \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x) dx = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \delta} g_\varepsilon(x) dx = 0 \quad \text{voor alle } \delta > 0.$$

b. Laat nu $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een C^1 functie zijn met $u(x + 2\pi) = u(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan definiëren we $u_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als het convolutieproduct

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y) g_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}} u(x - y) g_\varepsilon(y) dy.$$

Toon aan dat u_ε een C^1 functie is en dat $u_\varepsilon(x + 2\pi) = u_\varepsilon(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

c. Het is een stelling dat een 2π -periodieke C^1 functie u te schrijven is als uniform convergente Fourier reeks

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikx},$$

waarbij de coëfficiënten u_k gegeven worden door

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(y) e^{-iky} dy.$$

Onderdeel b. impliceert nu dat ook u_ε te schrijven is als uniforme limiet van een reeks

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^\varepsilon e^{ikx}.$$

Toon aan dat de Fouriercoëfficiënten van u_ε gegeven worden door

$$u_k^\varepsilon = u_k \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2} k^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Succes!