

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Eerste Deeltentamen Wiskundige Analyse II
Afdeling Wiskunde	22 oktober 2008
Vrije Universiteit	12:00 - 14:00 uur

Opgave 1. (Productregel voor differentiatie, 25 punten)

Laat $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ twee C^1 functies zijn. Definieer $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$\phi(t) = (f(t), g(t)) \text{ en } \psi(x, y) = xy .$$

We observeren dat de compositie $\psi \circ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven wordt door $(\psi \circ \phi)(t) = f(t)g(t)$.

a. Toon aan dat ϕ en ψ beide C^1 functies zijn en geef een uitdrukking voor de matrices van afgeleiden $D\phi(t)$ en $D\psi(x, y)$.

b. Gebruik de meerdimensionale kettingregel om te bewijzen dat $\psi \circ \phi$ een C^1 functie is en dat

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt}g(t) .$$

Opg. 2. (Hyperboloïde, 35 punten)

We herinneren eraan dat de cosinus hyperbolicus en de sinus hyperbolicus gedefinieerd zijn door $\cosh \phi = \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi})$ en $\sinh \phi = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi})$.

Beschouw de afbeeldingen $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die gegeven worden door

$$h(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cosh \phi \\ \sin \theta \cosh \phi \\ \sinh \phi \end{pmatrix} , \quad g(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 - 1 .$$

a. Bewijs dat h een immersie is. Geef een maximale open verzameling $U \subset \mathbb{R}^2$ waarop h injectief is.

b. Bewijs dat g een submersie is in alle punten ongelijk $(0, 0, 0)$. Bewijs dat de nulpuntsverzameling $g^{-1}(0) := \{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 0\}$ een 2-dimensionale C^∞ deelvarieteit van $\mathbb{R}^3$ is.

c. Laat zien dat het beeld van h gelijk is aan de nulpuntsverzameling van g . Maak een tekening van deze nulpuntsverzameling.

Opg. 3. (Diameter, 40 punten)

In deze opgave is $0 < m < n < \infty$ en $M \subset \mathbb{R}^n$ een m -dimensionale, nietlege, gesloten en begrensde C^∞ deelvarieteit van $\mathbb{R}^n$. Dit betekent in het bijzonder dat, als $X, Y \in M$ twee vast gekozen punten zijn, er open omgevingen $U \subset \mathbb{R}^n$ van X en $V \subset \mathbb{R}^n$ van Y zijn, en submersies $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ en $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ zo dat $M \cap U = f^{-1}(0)$ en $M \cap V = g^{-1}(0)$.

a. Definieer de functie $h : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-m)}$ door

$$h(x, y) = (f(x), g(y)) .$$

Toon aan dat h een submersie is. Bewijs hiermee dat het Cartesisch product $M \times M \subset \mathbb{R}^{2n}$ een $2m$ -dimensionale C^∞ deelvarieteit van $\mathbb{R}^{2n}$ is.

De afstand tussen twee punten $x, y \in \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd als

$$d(x, y) := \|x - y\| .$$

Het mag bekend verondersteld worden dat $M \times M$ nietleeg, begrensd en gesloten is als M dat is.

b. Toon aan dat de functie $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ zijn maximum aanneemt in een punt $(X, Y) \in M \times M$ met $X \neq Y$.

We definiëren de diameter van M als

$$\text{diam}(M) = \max\{d(x, y) \mid (x, y) \in M \times M\} = d(X, Y) ,$$

waarbij X, Y de punten uit onderdeel b. zijn.

c. Bewijs dat er constanten $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat

$$\frac{X - Y}{\|X - Y\|} = \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \nabla f_j(X) ,$$

en dat er constanten $\mu_1, \dots, \mu_{n-m} \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat

$$\frac{X - Y}{\|X - Y\|} = \sum_{j=1}^{n-m} \mu_j \nabla g_j(Y) .$$

Hint: de functie d neemt in (X, Y) onder de restrictie h zijn maximum aan.

d. Bewijs nu dat de vector $X - Y$ loodrecht op de beide raakruimten $T_X M$ en $T_Y M$ staat.

Succes!