

Wiskundige Analyse 2, tweede deeltentamen en tentamen, 21-12-2007

Geen formulebladen, geen rekenmachines. Studenten die alleen het tweede deeltentamen doen maken som 3,4 en 5. Licht antwoorden duidelijk toe. Voor het hele tentamen: 2 voor som 1, $2\frac{1}{2}$ voor 2, 2 voor 3, 1 voor 4, $2\frac{1}{2}$ voor 5, samen 10. Voor het tweede deeltentamen 4 voor 3, 2 voor 4, 5 voor 5, samen 11, maximaal 10. Succes!

1. Laat $R > 0$. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) = -u(r). \quad (1)$$

$X = C([0, R])$ is de ruimte van alle continue functies $u : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$, voorzien van de maximumnorm. Als $u \in X$ voor $0 < r \leq R$ aan (1) voldoet, dan geldt dat

$$u(r) = u(0) - \int_0^r \frac{1}{t} \int_0^t su(s) ds dt. \quad (2)$$

Omgekeerd, als $u \in X$ voor alle $0 < r \leq R$ aan (2) voldoet, dan is u een oplossing van (1).

- (a) Laat zien dat, voor $R > 0$ klein genoeg, er precies één oplossing $u \in X$ is met $u(0) = 1$.
 - (b) Bepaal een oplossing in de vorm van een machtreeks die voldoet aan $u(0) = 1$. Geef een formule voor de coëfficiënten en bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.
2. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft de eigenschap dat $f(x) = f(x + 2\pi)$ voor alle x in $\mathbb{R}$, en wordt voor $-\pi < x < \pi$ gegeven door $f(x) = x$.
- (a) Bereken de Fourierreeks van f .
 - (b) Voor welke x convergeert de Fourierreeks en wat is voor die x de som van de Fourierreeks?
 - (c) Bereken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z) = x^2 - y^3 + y + 2xy + z^2.$$

- (a) Bereken de eerste orde partiële afgeleiden van $f(x, y, z)$ en bereken alle punten (x, y, z) waarvoor geldt dat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

- (b) Bepaal rond alle bij 3a gevonden stationaire punten de tweede orde Taylor benadering van f en bepaal in welke stationaire punten f een lokaal maximum of minimum heeft. Heeft f een globaal extremum?
4. Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn en laat $w = f(x, y)$. Met de transformatie

$$x = u^2 + v^2, \quad y = 2uv,$$

schrijven we $w = f(x, y) = f(u^2 + v^2, 2uv)$. Druk $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ uit in u , v , $\frac{\partial w}{\partial u}$ en $\frac{\partial w}{\partial v}$.

5. Het oppervlak S in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de vergelijking

$$xy + yz + zx = 1.$$

- (a) Laat zien dat S een glad oppervlak is: in elk punt van S is de gradient van $xy + yz + zx$ een vector die niet gelijk is aan de nulvector.
- (b) Laat zien dat elk punt van S een omgeving heeft waarin het oppervlak te schrijven als de grafiek van een functie van x en y . Druk $\frac{\partial z}{\partial x}$ uit in x , y en z .
- (c) Bepaal de punten op S met minimale afstand tot de oorsprong. Gebruik hiertoe de methode van Lagrange met $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en $g(x, y, z) = xy + yz + zx - 1$.
- (d) Ook de verzameling $\tilde{S}$ gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ is een glad oppervlak. Laat zien dat in elk punt van de intersectie γ van S en $\tilde{S}$ de gradienten van $g(x, y, z) = xy + yz + zx - 1$ en $\tilde{g}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ lineair onafhankelijk zijn.
- (e) Laat zien dat elk punt van $\gamma = S \cap \tilde{S}$ een omgeving heeft waarin z en y te schrijven zijn als functies van x , en dat tenminste één van de afgeleiden van y en z naar x ongelijk nul is.