

Wiskundige Analyse 2, hertentamen, 4-2-2007

Geen formulebladen, geen rekenmachines. Licht antwoorden duidelijk toe. Normering: 2 punten voor elk van de best gemaakte 5 sommen. Succes!

1. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$u''(t) = \cos(u(t)).$$

$X = C([0, T])$ is de ruimte van alle continue functies $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, voorzien van de maximumnorm. Bewijs met behulp van een contractie argument dat er, voor $T > 0$ klein genoeg, precies één oplossing $u \in X$ is van de differentiaalvergelijking met $u(0) = 0$ en $u'(0) = 0$.

2. De analytische functie f is gedefinieerd op een open omgeving van $x = 0$ en voldoet daar aan

$$xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0.$$

Bepaal de machtreeks van $f(x)$ en de convergentiestraal van de machtreeks.

3. Bereken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

met behulp van de Fourierreeks van een geschikt gekozen functie.

4. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z) = y^2 - z^3 + z + 2yz + x^2.$$

Bepaal alle stationaire punten van f en bepaal in welke stationaire punten f een lokaal maximum of minimum heeft. Heeft f een globaal extremum?

5. Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn en laat $w = f(x, y)$. Met de transformatie

$$x = u^2 - v^2, \quad y = uv,$$

schrijven we $w = f(x, y) = f(u^2 - v^2, 2uv)$. Druk $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ uit in u, v , $\frac{\partial w}{\partial u}$ en $\frac{\partial w}{\partial v}$.

6. De verzameling γ in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de vergelijkingen

$$xy + yz + zx - 1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0.$$

Laat met de impliciete functie stelling zien dat elk punt van γ een omgeving heeft waarin γ te schrijven is als een geparametriseerde kromme.