



Bij dit tentamen mag geen gebruik worden gemaakt van rekenmachines, formulebladen of enig ander hulpmiddel. Na de correctie kan het gemaakte werk worden ingezien op het onderwijsbureau. Het tentamen bestaat uit 6 vragen, en duurt 3 uur.

Opgave 1 Gegeven is de functie $f(x, y) = ((x-2)^2 + y^2 - 4)(y-x)$.

- Bepaal het tekenverloop van f .
- Laat zien dat de stationaire punten van f ofwel op de lijn $y = x$ ofwel op de lijn $x + y = 2$ liggen. Aanwijzing: bekijk $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$.
- Laat zien dat f vier stationaire punten heeft en bepaal de aard daarvan met behulp van onderdeel a.

Opgave 2 Gegeven is de functie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{voor } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{voor } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- Laat zien dat f continu is in $(0, 0)$.
- Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

Opgave 3

- Formuleer de impliciete functiestelling.

- De functie $\tilde{F} : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} xy + z^2 + w^2 \\ x + y + zw \end{pmatrix}.$$

Verder is gegeven de verzameling $V = \{(x, y, z, w) \mid F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Laat zien dat in een omgeving van het punt $(0, 0, 2, 1)$ men (z, w) lokaal als functie van (x, y) kan schrijven als (x, y, z, w) op V liggen. Noem die functie $(z, w) = g(x, y)$. Bepaal dan ook $g'(0, 0)$.

Opgave 4 In $\mathbb{R}^2$ wordt een gebied D begrensd door de lijnen $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ en $x + y = 4$. Bereken $\int_D \frac{1}{x+y} dx dy$ via de volgende overgang op andere coördinaten: $x = u - uv$, $y = uv$.

Let op: het is duidelijk dat de uitkomst een positief getal moet zijn!!

Opgave 5 Voor $t > 0$ en $x \in \mathbb{R}$ is de functie $g(x, t)$ gegeven door $g(x, t) = e^{-x^2} \sin(xt)$. Verder is voor $t > 0$ de functie F gedefinieerd door $f(t) = \int_0^1 e^{-x^2} \sin(xt) dx$.

- Laat zien dat f continu en differentieerbaar is. Geef hierbij duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.
- Laat zien dat f de oplossing is van het beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} f'(t) + \frac{1}{2}tf(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \cos t \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

(zonder overigens dat beginwaardeprobleem op te lossen).

Opgave 6

- Formuleer het principe van Cavalieri.
- Gebruik dat om de inhoud (in liters) te berekenen van een emmertje dat de volgende maten heeft: 40 cm diameter aan de bovenkant, 20 cm diameter aan de onderkant, en $10\sqrt{3}$ cm diep. (Hint: bereken eerst de straal van de cirkel die de doorsnede op hoogte x van de bodem beschrijft.)

Normering

1a:2	2a:2	3a:3	4:6	5a:3	6:a:3
b:2	b:2	b:3		b:3	b:3
c:2	c:2				

Cijfer is $1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$