



Faculteit der Exacte Wetenschappen Vrije Universiteit	Wiskundige Analyse II Tentamen 23-12-2005
--	--

Dit tentamen bestaat uit twee delen: de eerste vier opgaven vormen het tweede deeltentamen, voor wie het gehele tentamen wil doen volgen dan nog twee opgaven (z.o.z.).

Opgave 1 a. Formuleer de inverse functie stelling.

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$.

- b. Laat zien dat f lokaal inverteerbaar is in een omgeving van elk punt $(x, y) \neq (0, 0)$.
- c. Laat zien dat f niet globaal inverteerbaar is.

Opgave 2 Gegeven zijn drie vaste reële getallen α, β en γ , geen van allen nul, en met $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Verder zijn gegeven twee functies

$$g_1(x, y, z) = -\gamma y + \beta z, \quad g_2(x, y, z) = -\beta x + \alpha y + \beta.$$

De verzameling V is vervolgens gedefinieerd door

$$V = \{(x, y, z) \mid g_1(x, y, z) = 0, \text{ en } g_2(x, y, z) = 0\}.$$

- a. Wat stelt V meetkundig voor?
- b. Gegeven is ook de functie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Beargumenteer dat f op V een minimum aanneemt en bepaal met behulp van de methode van Euler-Lagrange de locatie van dat minimum.

Opgave 3 Gegeven is $f(x, y) = -\frac{e^{-x}}{y \ln x}$, en het gebied $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Bepaal $\int \int_D f(x, y) dx dy$. Geef daarbij goed aan welke stelling(en) u gebruikt, en waarom dat mag.

Opgave 4 Gegeven is $g(x, y) = e^{-x} \frac{\sin(xy)}{x}$, en $f(x) = \int_0^\infty g(x, y) dy$.

- a. Laat zien $f'(y) = \int_0^\infty e^{-x} \cos(xy) dx$. Geef goed aan wat de voorwaarden zijn van de stelling die je gebruikt, en waarom die voorwaarden geldig zijn in dit geval.
- b. Bereken $f'(y)$ expliciet (aanwijzing: twee keer partieel integreren).
- c. Bereken $f(0)$, en gebruik dat, en onderdeel b, om een expliciete formule voor $f(y)$ te geven.

Hier eindigt het tweede deeltentamen.

Opgave 5 Bekijk de functie $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeven door

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}-1}{t} & \text{voor } t \neq 0 \\ -1 & \text{voor } t = 0 \end{cases}.$$

- a. Laat zien dat h differentieerbaar is in 0.

Voer nu in de functie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-(x-y)}-1}{x-y} & \text{voor } x \neq y \\ -1 & \text{voor } x = y \end{cases}.$

- b. Laat zien dat f differentieerbaar is in elk punt van de lijn $x = y$ en bepaal de afgeleide in elk van die punten. Aanwijzing: gebruik de kettingregel.

Opgave 6 Gegeven is de functie $f(x, y) = (4x^2 + 3y^2)(\cos(x - y) - 2)$.

- a. Bepaal de Taylor ontwikkeling van f rondom $(0, 0)$ tot en met termen van de vierde graad.
- b. Laat zien dat f een extreem heeft in het punt $(0, 0)$ en bepaal de aard van dat extreem.

Normering

1a:2	2a:2	3:6	4a:2	5a:2	6a:2
b:2	b:4		b:3	b:3	b:2
c:3			c:3		

Cijfer tweede deeltentamen is $1 + \frac{\text{aantal punten}}{3}$

Cijfer hele tentamen is $1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$