

Opgave 1 Gegeven is de functie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2} & \text{voor } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{voor } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- a. Laat zien dat f continu is in $(0, 0)$.
- b. Bepaal de partiële afgeleiden van f in het punt $(0, 0)$.
- c. Laat zien dat f differentieerbaar in het punt $(0, 0)$.

Aanwijzing: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$.

Opgave 2 Gegeven is de functie $f(x, y) = (x - 3y)(e^{x+3y} - 1)$.

- a. Bepaal de Taylor ontwikkeling van f rondom $(0, 0)$ tot en met termen van de derde graad.
- b. Laat met behulp hiervan zien dat f een stationair punt heeft in het punt $(0, 0)$ en bepaal de aard van dat stationaire punt.

Opgave 3

- a. Formuleer de inverse functiestelling.
- b. Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven zijn door $f(x, y) = (x^2 - 9y^2, x^2 + 4y^2)$. Geef aan in welke punten de inverse functiestelling je vertelt dat f lokaal inverteerbaar is. Bereken $f(1, 1)$ en de afgeleide van de inverse in het beeldpunt van $(1, 1)$.
- c. Laat zien dat f niet globaal inverteerbaar is.

Opgave 4 Laat G het gebied zijn in het halfvlak $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \}$ dat ingesloten wordt tussen de cirkel $x^2 + y^2 = 2$ en de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$. Bepaal de oppervlakte van het gebied G .

Aanwijzing: $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln |\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x)| + c$. Dit laatste hoeft je niet te bewijzen om het te gebruiken.

Opgave 5 Bepaal $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c^2} \int_0^c \int_y^c \cos(x^2) dx$. Beargumenteer elke stap en vermeld de stellingen die je gebruikt.

Opgave 6 Gegeven is de functie $g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \ln(1 + (yx)^2) & \text{voor } x \neq 0 \\ y^2 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$.

Ook is gegeven de functie $h(t) = \frac{1}{t} \ln(1 + t)$ voor $t \neq 0$ en $h(0) = 1$.

- Wat is het verband tussen h en g ? Gebruik dit om te laten zien dat g een C^1 functie is. (N.B. je hoeft je alleen te bekommeren om het C^1 zijn in punten op de y -as.)
- Voer nu in $F(y) = \int_0^1 g(x, y) dx$. Laat zien dat F differentieerbaar is, en geef een formule in termen van een integraal voor $F'(y)$. Geef aan welke stelling je hierbij gebruikt.
- Bereken $F'(y)$ door de integraal die je in onderdeel b hebt verkregen uit te rekenen. Bereken daarna ook $F(y)$.

Normering

1a:3	2a:4	3a:3	4:7	5:6	6:a:3
b:2	b:3	b:3			b:3
c:3		c:2			c:3

Cijfer tentamen 1 = $1 + \frac{\text{aantal punten}}{5}$