



Dit tentamen bestaat uit twee delen: de eerste vier opgaven vormen het tweede deeltentamen, voor wie het gehele tentamen wil doen volgen dan nog drie opgaven (z.o.z.).

Opgave 1 Laat D het gebied zijn in het kwadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ dat ingesloten wordt door de kromme $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. Bepaal de oppervlakte van het gebied D , Aanwijzing: gebruik poolcoördinaten.

Opgave 2 Zij G het gebied ingesloten door de vier parabolen $ay = x^2$, $by = x^2$ (met $0 < a < b$) en $cx = y^2$, $dx = y^2$ (met $0 < c < d$). We voeren in het kwadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ nieuwe coördinaten in via $u = \frac{x^2}{y}$ en $v = \frac{y^2}{x}$.

a. Laat zien dat $x = u^{1/3}v^{2/3}$ en $y = u^{2/3}v^{1/3}$.

b. Bereken de Jacobiaan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

c. Bereken de oppervlakte van G .

d. Bereken $\int \int_G xy \, dA$.

Opgave 3 Laat zien dat $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \int_y^\infty e^{-x^2} \, dx \, dy$ bestaat en bereken die limiet. Beargumenteer elke stap en vermeld de stelling(en) die je gebruikt. Aanwijzing: mogelijk is op een bepaald moment de afchatting $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ voor $x \geq 1$ handig.

Opgave 4 Gegeven is $g(x, y) = e^{-y^2} \cos(2xy)$, en $f(x) = \int_0^\infty e^{-y^2} \cos(2xy) \, dy$. Je mag in deze som gebruiken dat $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

a. Laat zien $\int_0^\infty g(x, y) \, dy$ uniform convergent is.

b. Laat zien dat f differentieerbaar is, en geef een formule voor $f'(x)$ in termen van een oneigenlijke integraal. Geef goed aan wat de voorwaarden zijn van de stelling die je gebruikt, en waarom die voorwaarden geldig zijn in dit geval.

c. Gebruik partiële integratie om te laten zien dat $y = f(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $y' = -2xy$.

d. Laat zien dat elke functie van de vorm $y = C \cdot e^{-x^2}$ voldoet aan die differentiaalvergelijking. Het zijn ook alle oplossingen, maar dat hoeft je niet te laten zien. Laat zien dat nu volgt $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-x^2}$.

Hier eindigt het tweede deeltentamen.

Opgave 5 Gegeven is de functie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{voor } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{voor } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Laat zien dat f continu is in $(0, 0)$.
- Bepaal de partiële afgeleiden van f in het punt $(0, 0)$.
- Is f differentieerbaar in het punt $(0, 0)$?

Opgave 6 Gegeven is de functie $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)(\sin(x + y) - 1)$.

- Bepaal de Taylor ontwikkeling van f rondom $(0, 0)$ tot en met termen van de derde graad.
- Laat zien dat f een extreem heeft in het punt $(0, 0)$ en bepaal de aard van dat extreem.

Opgave 7

- Formuleer de impliciete functiestelling.
- Bekijk de kromme gegeven door $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. Laat zien dat deze kromme in een omgeving van het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ de grafiek van een functie $y = h(x)$ beschrijft, en bepaal de raaklijn aan de kromme in dat punt.

Normering

1:7	2a:2	3:9	4a:3	5a:2	6:a:3	7a:3
	b:2		b:3	b:2	b:3	b:3
	c:2		c:3	c:2		
	d:2		d:3			

Cijfer deeltentamen 1 = $1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$ Cijfer hele tentamen