

**Opgave 1.**

In een omgeving van $(0, 0)$ definiëren we de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Het getal α is positief.

- a. Voor welke $\alpha > 0$ is f continu in $(0, 0)$?
- b. Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- c. Voor welke $\alpha > 0$ is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

Opgave 2.

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + y^2 - 4)$.

- a. Schets het tekenverloop van f . Wat kun je nu zeggen over de punten $(2, 0)$ en $(1, \pm\sqrt{3})$?
- b. Laat zien dat de punten $(\frac{1 \pm \sqrt{97}}{8}, 0)$ de enige punten zijn waar f een extreme waarde aanneemt.

Opgave 3.

Gegeven is de functie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - zxy \\ \sin(xy + zx + zy) \end{pmatrix}$$

en de functie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, met $g(x, y) = f(x, y, 0)$.

- a. Laat zien dat g in elk punt van de y -as lokaal inverteerbaar is, behalve in de oorsprong.
- b. Laat zien dat $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin 1 \end{pmatrix}$ in de omgeving van $(1, 0, 1)$ een functie definieert die x en y uitdrukt in z . Bepaal de afgeleide van die functie in het punt $z = 1$.

Opgave 4.

Gegeven is de functie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die de volgende eigenschappen heeft: f is stijgend, en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = f(x)y.$$

- a. Laat zien dat de differentiaalvergelijking een oplossing heeft die op heel $[0, \infty)$ gedefinieerd is. (Aanwijzing: denk aan globale Lipschitz conditie!)
- b. Geef een formule die $y(x)$ uitdrukt in $y(0)$ en $\int_0^x f(s) ds$. Met andere woorden: los de differentiaalvergelijking op.
- c. Waarom is $|y(x)|$ stijgend vanaf een zekere x_0 ?
- d. Laat zien dat $\int_0^\infty f(s) - 1 ds$ bestaat en kleiner dan nul is.
- e. Laat zien dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|y(x)|}{e^x}$ bestaat en kleiner is dan $|y(0)|$.

Opgave 5.

Beargumenteer in deze som steeds elke stap!

- a. Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin x e^{-nx} dx$.
- b. Laat zien dat $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2 + n^2} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}$.
- c. i. Laat zien dat de rij functies $f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx}$ wel puntsgewijs naar nul gaat op $[0, 1]$, maar niet uniform.
- ii. Laat zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$. (Aanwijzing: gebruik een voor de hand liggende afchatting voor $f_n(x)$ om de gevraagde integralen af te schatten met iets dat je wel makkelijk kunt uitrekenen.)

Opgave 6.

Voor $t > 0$ en $x \in \mathbb{R}$ is de functie $g(x, t)$ gedefinieerd door $g(x, t) = e^{-x^2} \cos 2xt$. Verder is voor $t > 0$ de functie f gedefinieerd door $f(t) = \int_0^1 e^{-x^2} \cos 2xt dx$.

- a. Laat zien dat f continu en differentieerbaar is. (Je mag hierbij gebruik maken van een stelling over verwisseling van differentiatie en integraal, mits je de voorwaarden van die stelling noemt en aangeeft waarom g aan die voorwaarden voldoet.)
- b. Laat zien dat f voldoet aan de differentiaalvergelijking $-f'(t) + 2tf(t) = \frac{1}{e} \sin 2t$.

Normering

1a:3	2a:3	3a:3	4a:2	5a:3	6a:3
b:2	b:4	b:3	b:2	b:3	b:3
c:3			c:1	c:3	
			d:2		
			e:2		

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{5}$$