



Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(\sin y)^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{voor } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{voor } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, met $\alpha > 0$.

- Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Voor welke waarden van α is f continu?
- Voor welke waarden van α is f differentieerbaar?

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x, y) = ((x - 2)^2 + y^2 - 4)(x - y)$.

- Schets het tekenverloop van f .
- Bepaal de stationaire punten van f . (Aanwijzing: bekijk $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$.)
- Wat kun je uit a en b concluderen over de aard van de gevonden stationaire punten?

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x, y, z) = e^{xy+z^2}$.

- Bepaal de Taylor ontwikkeling van f rondom $(0, 0, 0)$ tot en met termen van graad 6.
- Laat zien dat $(0, 0, 0)$ een stationair punt is van f . Gebruik je antwoord van onderdeel a om de tweede afgeleide in $(0, 0, 0)$ te bepalen (als je dat al niet gedaan had), en laat daarmee zien dat f in $(0, 0, 0)$ geen extreme waarde aanneemt.

Opgave 4

Gegeven is een $n \times n$ inverteerbare symmetrische reële matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. We maken daarmee de functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ via $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. Anders gezegd, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$.

- Laat zien dat $f'(x) = 2Ax = (2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)_{i=1}^n$.

- b. Op de verzameling $V = \{x \mid f(x) = c\}$ bekijken we de functie $g(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Laat met behulp van de methode van Euler-Lagrange zien dat de stationaire punten van g op V te vinden zijn als de eigenvectoren van A , en dat de bijbehorende Lagrange multiplicatoren precies de getallen $\frac{1}{\lambda}$ zijn, waar λ de bijbehorende eigenwaarde van A is.

Opgave 5

- a. Formuleer de impliciete functiestelling.

Gegeven zijn twee functies f_1 en f_2 , allebei van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$, allebei C^1 en met $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

- b. De functie $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} f_1(x) + y_1^2 + y_2^2 \\ f_2(x) + y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

en de verzameling $V = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) \mid F(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Laat zien dat in een omgeving van het punt $(0, \dots, 0, 2, 1)$ men (y_1, y_2) lokaal als functie van $(x_1, \dots, x_n)$ kan schrijven als $(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2)$ op V liggen. Noem die functie $(y_1, y_2) = g(x)$. Bepaal ook $g'(0)$ in termen van f'_1 en f'_2 .

Normering

1a:2	2a:2	3a:4	4a:3	5a:3
b:3	b:3	b:3	b:4	b:4
c:3	c:2			

Cijfer deeltentamen $1 = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$