



De normering van de opgaven vind je op de laatste pagina van het tentamen.

Opgave 1 Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin \sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a. Is f continu?
- b. Bepaal de partiële afgeleiden van f in $(0, 0)$.
- c. Is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

Opgave 2 Gegeven is de functie $f(x, y) = ((x-1)^2 + y^2 - 1)xy$.

- a. Schets het tekenverloop van f .
- b. Wat volgt daaruit voor de punten $(0, 0)$ en $(2, 0)$?
- c. Bepaal de extremen van f .

Opgave 3 Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix}.$$

- a. Formuleer de inverse functie stelling.
- b. Bekijk de afbeelding $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die gegeven is door $g(x, y) = f(x, y, 1)$. Is g globaal inverteerbaar?
- c. Laat zien dat g wel lokaal inverteerbaar is in de omgeving van elk punt (x_0, y_0) als voldaan is aan $x_0^2 \neq y_0^2$.
- d. In de omgeving van $(1, 1, 0)$ definieert de vergelijking $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ x als een functie van y en z . Motiveer waarom dat zo is, en geef de afgeleide van die functie.

Opgave 4 Zij $f(x, y) = y(\frac{1}{x^2} - x)$ voor $x \neq 0$. In deze opgave bekijken we de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$.

- a. In welke punten (x, y) voldoet f aan een locale Lipschitz conditie in y ?
- b. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.
- c. Bepaal voor een willekeurige oplossing $\lim_{x \downarrow 0} y(x)$. Wat kun je zeggen over $\lim_{x \uparrow 0} y(x)$?

Opgave 5 Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) \\y'(t) &= z(t) \\z'(t) &= t\end{aligned}$$

met beginwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ en $z(0) = 1$.

- a. Schrijf het stelsel in de vorm $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + f(t)$ met een 3×3 matrix A . Geef A en f . Ga na dat $A^3 = 0$.
- b. Bereken voor deze matrix A de matrixfunctie e^{At} door gebruik te maken van de (machtreeks) definitie. (Hint: je hebt zojuist laten zien dat $A^3 = 0$.)
- c. Los nu het stelsel differentiaalvergelijkingen op door gebruik te maken van de formules voor variatie van constanten:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s) ds.$$

Opgave 6 De functie $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = a - a^2x$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$, en $f(x) = 0$ voor $\frac{1}{a} \leq x \leq \pi$. Hierbij is $a \neq 0$.

- a. Laat zien dat de cosinusreeks voor f gegeven wordt door

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi} (1 - \cos(\frac{n}{a})) \cos(nx).$$

b. Bereken nu door geschikte waarden van x in te vullen de som van de volgende reeksen. Je mag daarbij gebruik maken van het feit dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n}{a})}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\frac{n}{a})}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\frac{n}{a})}{n^2}$$

Normering

1a:2	2a:2	3a:2	4a:3	5a:2	6a:4
b:2	b:2	b:2	b:3	b:2	b:4
c:3	c:3	c:2	c:2	c:3	
		d:2			

$$\text{Cijfer hele tentamen} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{5}$$