



Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit

Wiskundige Analyse II
Deeltentamen 16-12-2002

Lees eerst deze informatie zorgvuldig door. Dit tentamen komt namelijk in twee mogelijke verschijningsvormen. Je kunt hier maken:

- Deeltentamen 2 van Wiskundige Analyse II. Dan maak je de opgaven 1 tot en met 4. Je hebt dan **twee** uur de tijd.
- Het hele tentamen Wiskunde Analyse II. Dan maak je de opgaven 1 tot en met 7. Je hebt dan **drie** uur de tijd.

De normering van de opgaven vind je op de laatste pagina van het tentamen.

Opgave 1

Zij $f(x, y) = y(\frac{1}{x} - x)$ voor $x \neq 0$. In deze opgave bekijken we de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$.

- In welke punten (x, y) voldoet f aan een locale Lipschitz conditie in y ?
- Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.
- Welke oplossingen gaan door het punt $(0, 0)$?

Opgave 2 Bekijk het beginwaardeprobleem

$$y' + y = f(x), \quad y(0) = 0.$$

- Bewijs met behulp van variatie van constanten dat geldt $y(x) = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$.
- Neem aan dat $0 < f(x) \leq M$ voor alle $x > 0$. Laat zien dat $0 < y(x) \leq M(1 - e^{-x})$.

c. Neem nu aan dat bovendien f een C^1 -functie is met $0 \leq f'(x) \leq N$ voor alle $x \geq 0$, en $f(0) = 0$. Laat zien dat $y(x)$ monotoon stijgend is.

(Aanwijzing: gebruik partiële integratie om y uit te drukken in termen van f en f' . De formule die je dan krijgt gebruik je om aan te tonen dat $y' > 0$.)

d. Laat zien dat $0 \leq f(x) - y(x) \leq N(1 - e^{-x})$.

Opgave 3 Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= bx(t) - ay(t)\end{aligned}$$

waar a en b reële getallen zijn.

a. Neem $a = 3$ en $b = 4$, en bepaal voor dat geval de algemene oplossing van het stelsel.

b. Laat nu a en b willekeurige reële getallen zijn. Laat zien dat oplossingen altijd de volgende vorm hebben:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t} \underline{x}_1 + c_2 e^{-\lambda t} \underline{x}_2,$$

waar λ een positief reëel getal is. (N.B. Je hoeft de vectoren $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ niet in termen van a en b te bepalen, maar λ wel.)

Opgave 4 De functie $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = e^{\alpha x}$, met $\alpha \neq 0$.

a. Bereken de complexe Fouriercoëfficiënten c_n van f .

b. Is $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ convergent? Leg uit waarom je antwoord niet in strijd is met de stelling die zegt dat $\sum |c_n|$ convergent is als f een C^1 -functie is.

c. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}$ op twee manieren:

(i) door een geschikte waarde voor x in te vullen in de Fourierreeks van f , (aanwijzing: $\frac{1}{\alpha - in} + \frac{1}{\alpha + in} = \frac{2\alpha}{n^2 + \alpha^2}$),

(ii) door gebruik te maken van de stelling van Parseval.

Nota Bene: Dit is het einde van het tweede deeltentamen!!! Voor het hele tentamen volgen nog drie opgaven.

Opgave 5 Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a. Laat zien dat f continu is in $(0, 0)$.
- b. Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- c. Is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

Opgave 6 Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = e^{(x+2y)} \cos(x - 2y) - 1 - (x + 2y).$$

- a. Bepaal de Taylorontwikkeling van f rond $(0, 0)$ tot en met termen van graad twee.
- b. Laat met behulp van a zien dat $(0, 0)$ een stationair punt is van f en dat f een zadelpunt heeft in $(0, 0)$.

Opgave 7

- a. Formuleer de impliciete functiestelling.
- b. De functie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $F(x, y, z) = e^{xyz}$. Laat zien dat in een omgeving van het punt $(2, \frac{1}{2}, 1)$ door $F(x, y, z) = e$ lokaal z als functie van (x, y) wordt bepaald. We noteren die functie met $z = g(x, y)$. Bepaal $g'(2, \frac{1}{2})$.
- c. Laat zien dat $z = \frac{1}{xy}$ de functie g uit het vorige onderdeel van de opgave is. Controleer daarmee je antwoord voor $g'(2, \frac{1}{2})$.

Normering

1a:3	2a:2	3a:4	4a:3	5a:2	6a:3	7a:2
b:3	b:2	b:4	b:3	b:2	b:3	b:2
c:3	c:3		c:4	c:2		c:2
	d:2					

$$\text{Cijfer tweede deeltentamen} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$$

$$\text{Cijfer hele tentamen} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{6}$$