



Lees eerst deze informatie zorgvuldig door. Dit tentamen komt namelijk in twee vormen. Je kunt hier maken:

- Deeltentamen 1 van Wiskundige Analyse II. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4 en 5. Je hebt dan **twee** uur de tijd.
- Het herhalings tentamen Wiskunde Analyse II voor Econometristen. Dan maak je de opgaven 1, 3, 4, 6, 7 en 8. Je hebt dan **drie** uur de tijd.

De normering van de opgaven van het deeltentamen vind je na opgave 5, de normering voor de rest na opgave 8.

Voor de econometristen is aan het eind een tabel met Laplace getransformeerden toegevoegd.

Opgave 1

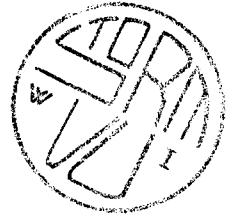
Gegeven is de functie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{voor } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{voor } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, met $\alpha > 0$.

- Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Voor welke waarden van α is f continu?
- Voor welke waarden van α is f differentieerbaar?

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x, y) = ((x - 1)^2 + y^2 - 1)xy$.

- Schets het tekenverloop van f .
- Wat volgt daaruit voor de punten $(0, 0)$ en $(2, 0)$?
- Bepaal de stationaire punten van f . Wat kun je op grond van het a onderdeel zeggen over de twee stationaire punten die niet de punten uit het b onderdeel zijn?
- Ga na dat je de conclusie uit het b onderdeel met betrekking tot het punt $(0, 0)$ niet kunt trekken op grond van de waarde van de tweede afgeleide.



Opgave 3

- Formuleer de inverse functiestelling.
- Gegeven is de functie $f(x, y) = ((x^2 - y^2)^2, xy)$. Bepaal de afgeleide van f , en de determinant daarvan.
- Voor welke punten (x, y) kun je nu op grond van de inverse functiestelling concluderen dat f in de omgeving van dat punt lokaal inverseerbaar is?
- Laat zien dat f niet lokaal injectief is in de omgeving van het punt $(1, 1)$. (N.B. je moet dus in *elke* omgeving van het punt $(1, 1)$ twee punten aangeven die dezelfde functiewaarde hebben.)

Opgave 4

Gegeven is $f(x, y) = xy + x + y$ en $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Bepaal met behulp van de methode van Euler-Lagrange de extremen van f op de kromme $g(x, y) = 0$.

Opgave 5

De functie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, 3xyz).$$

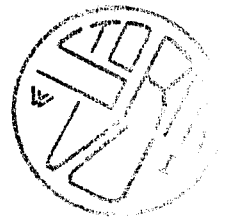
Laat zien dat in een omgeving van het punt $(0, 1, 1)$ men (y, z) lokaal als functie van x kan schrijven als (x, y, z) voldoen aan $F(x, y, z) = (1, 0)$. Noem die functie $g(x)$. Bepaal ook $g'(0)$.

Normering

1a:2	2a:2	3a:2	4:7	5:7
b:3	b:1	b:2		
c:3	c:2	c:1		
	d:2	d:2		

Cijfer deeltentamen $1 = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$

Dit is het einde van het eerste deeltentamen. De opgaven 6, 7 en 8 voor het herhalingstentamen voor Econometristen staan op de volgende pagina.



Opgave 6

Bekijk de differentiaalvergelijking $y' = -2y^2x$.

- Los de differentiaalvergelijking op.
- Laat zien dat $f(x, y) = -2y^2x$ in een omgeving van het punt $(1, 1)$ voldoet aan een Lipschitzvoorwaarde.
- Bepaal de oplossing waarvoor geldt $y(1) = 1$.

Opgave 7

Los het volgende beginwaardeprobleem op met Laplacetransformatie:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Opgave 8

Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}(\pi + x) & -\pi < x < -\frac{1}{4}\pi \\ \frac{1}{2}x & -\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{1}{4}\pi \\ \frac{1}{6}(\pi - x) & \frac{1}{4}\pi < x \leq \pi \end{cases}.$$

- Bepaal de reële Fourierreeks van f .
- Formuleer de reële versie van de stelling van Parseval, en gebruik die om de som van de reeks

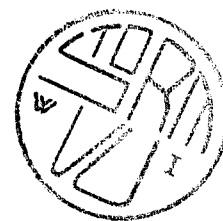
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

uit te rekenen.

Normering

6a:2	7:7	8a:4
b:3		b:5
c:3		

$$\text{Cijfer herhalingstentamen} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{5}$$



$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$