

Lees eerst deze informatie zorgvuldig door. Dit tentamen komt namelijk in vier mogelijke verschijningsvormen. Je kunt hier maken:

- Deeltentamen 2 van Wiskundige Analyse II voor Econometristen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4E. Je hebt dan **twee** uur de tijd.
- Deeltentamen 2 van Wiskundige Analyse II voor Wiskundigen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4W. Je hebt dan **twee** uur de tijd.
- Het hele tentamen Wiskunde Analyse II voor Econometristen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4E, 5 en 6. Je hebt dan **drie** uur de tijd.
- Het hele tentamen Wiskunde Analyse II voor Wiskundigen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4W, 5 en 6. Je hebt dan **drie** uur de tijd.

De normering van de opgaven vind je op de laatste pagina van het tentamen.

Voor de econometristen is aan het eind een tabel met Laplace getransformeerden toegevoegd.

Opgave 1

Zij $G(x, y) = \frac{2y}{x}$ voor $x \neq 0$. In deze opgave bekijken we de differentiaalvergelijking $y' = G(x, y)$.

a. Voor elke $\varepsilon > 0$ definiëren we een verzameling $V_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \varepsilon\}$. Laat zien dat G op V_ε voldoet aan een globale Lipschitz conditie in y .

b. Formuleer de stelling over globale existentie en uniciteit voor het beginwaardeprobleem voor differentiaalvergelijkingen.

c. Laat met de stelling die je zojuist geformuleerd hebt zien dat het beginwaardeprobleem $y' = \frac{2y}{x}$, $y(1) = 1$ een unieke oplossing heeft op $(0, \infty)$.

d. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

e. Is er een unieke oplossing met $y(0) = 0$? Is dat in tegenspraak met onderdeel c?

f. Van een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty f(t) dt = 0$. Laat zien dat voor elke oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' = \frac{2y}{x} + xf(x)$$

geldt dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \text{ bestaat.}$$

Bepaal die limiet als gegeven is dat $y(1) = 2$.

Opgave 2

a. Bepaal de algemene oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2x(t) + z(t), \\y'(t) &= 2y(t) + z(t), \\z'(t) &= x(t) + y(t) + z(t).\end{aligned}$$

b. Bekijk (**du**s **niet:los op!**) ook het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2x(t) + z(t), \\y'(t) &= 2y(t) + z(t), \\z'(t) &= x(t) + y(t) + z(t) + t.\end{aligned}$$

Ga na dat in dit geval een particuliere oplossing van de vorm

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

niet bestaat. Hoe komt dat?

(Opmerking: Een oplossing van dit stelsel kan wel worden gevonden met behulp van de methode van variatie van constanten, maar dat wordt niet gevraagd hier!)

Opgave 3 De functie $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

- a.** Bepaal de Fourierreeks van f .
- b.** Wat is de voor $-\pi < x \leq \pi$ de som van de Fourierreeks?
- c.** Bereken met behulp van a en b de som van de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

d. Formuleer de reële versie van de stelling van Parseval, en gebruik die om de som van de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

uit te rekenen.

Opgave 4W

Bekijk de operator $\frac{d^2}{dx^2}$ op de vectorruimte V van alle C^2 functies f op het interval $[0, 1]$ waarvoor geldt dat $f(0) + f'(0) = 0$ en $f(1) + f'(1) = 0$.

a. Laat zien dat deze operator op deze ruimte symmetrisch is.

b. Laat zien: $y(x) = -k\pi \cos(k\pi x) + \sin(k\pi x)$ is in de vectorruimte V , en is een eigenvector van de operator $\frac{d^2}{dx^2}$ bij eigenwaarde $-k^2\pi^2$. (Hint: voor dat laatste moet je dus laten zien dat $\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2\pi^2 y$, en dat is simpel.)

Opmerking: je hoeft niet te laten zien dat dit alle eigenwaarden zijn, al is dat wel zo.

Opgave 4E

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}$$

Los deze differentiaalvergelijking op door middel van een Laplacetransformatie onder de nevenvoorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Nota Bene: Dit is het einde van het tweede deeltentamen!!! Voor het hele tentamen volgen nog twee opgaven.

Opgave 5

Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = e^{(x+y)} \sin(x - y) - (x - y).$$

a. Bepaal de Taylorontwikkeling van f rond $(0, 0)$ tot en met termen van graad drie.

b. Laat met behulp van a zien dat $(0, 0)$ een stationair punt is van f maar dat f geen extreme waarde aanneemt in $(0, 0)$.

Opgave 6

De functie $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gegeven door $h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$. Laat zien dat in een omgeving van het

punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3})$ door $h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokaal x als functie van (y, z) wordt bepaald. We noteren die functie met $x = g(y, z)$. Bepaal $g'(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Geef bij deze opgave nauwkeurig aan welke stelling u gebruikt.

Normering

1a:2	2a:4	3a:3	4W a:4	4E:8	5a:3	6:3
b:2	b:3	b:2	b:4		b:3	
c:1		c:2				
d:2		d:3				
e:1						
f:3						

Cijfer tweede deeltentamen $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$

Cijfer hele tentamen $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{5}$

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$