

Tentamen Analyse II 24-4-2001

Opgave 1

Zij $f(x, y) = \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$, en $f(0, 0) = 0$.

- Laat zien dat f continu is in $(0, 0)$.
- Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ met behulp van de definitie.
- Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0, 0)$.

Opgave 2

Zij $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)(xy - 1)$.

- Schets het tekenverloop van f .
- Wat kun je nu zeggen over de punten $(1, 1)$ en $(-1, -1)$?
- Bepaal de stationaire punten en de extremen van f .

Opgave 3

Zij $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \times [0, \infty)$ gegeven door $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$.

- Laat zien dat voor $x \neq y$ de functie f lokaal inverteerbaar is. Noem $f(x, y) = (t, w)$, en bepaal ook de afgeleide van $f^{-1}(t, w)$ in die punten die beeld zijn van een punt waarvoor $x \neq y$.
- Ga na of f ook globaal inverteerbaar is.

Opgave 4

- Zij $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$. Ga na of $f(x, y)$ voldoet aan een Lipschitz-conditie in de variable y in een omgeving van de oorsprong.
- Los de differentiaal vergelijking $y' = f(x, y)$ op.
- Bepaal voor de algemene oplossing $y(x)$ de volgende limieten: $\lim_{x \downarrow 0} y(x)$ en $\lim_{x \uparrow 0} y(x)$.

Opgave 5

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op

a. $y' + y = x^2$

b. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin(x)$

c. Los het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op

$$x' = x + 2y + 2z$$

$$y' = 6x + y$$

$$z' = 2x + z$$

Opgave 6

Gegeven is een functie $f(x)$ op het interval $(-\pi, \pi]$ door $f(x) = 0$ voor $x < 0$ en $f(x) = e^x$ voor $x > 0$.

a. Bereken de Fouriercoëfficiënten van f .

b. Bereken door een geschikte waarde van x te nemen de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{1 + k^2}.$$

Beargumenteer wat u doet.

Normering	1a:3	2a:3	3a:4	4 a:3	5a:3	6a:4
	b:3	b:3	b:3	b:3	b:3	b:4
	c:4	c:4		c:3	c:4	

$$\text{Cijfer hele tentamen} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{6}$$