

Geef altijd voldoende uitleg bij je antwoorden! Het gebruik van een boek, een rekenmachine, een formuleblad of van aantekeningen is niet toegestaan.

1. Laat (a_n) een convergente rij zijn met positieve termen en limiet A .
 - a) Toon aan, door gebruik te maken van de (ε, N) -definitie: $A \geq 0$.
 - b) Toon aan, door gebruik te maken van de (ε, N) -definitie: de rij $(\sqrt{a_n})$ is convergent met limiet $\sqrt{A}$. [Aanwijzing: maak onderscheid tussen $A = 0$ en $A > 0$. Je kunt bovendien gebruik maken van: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.]

2. Laat $a_n > 0$ voor alle n . Toon aan:

Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert, dan divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ ook.

3. Toon aan, met behulp van de limietdefinitie, dat

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Laat $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ en laat $p, q \in \mathbb{R}$ willekeurige reële getallen zijn. We bekijken de polynoomfunctie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^{2n+1} + px + q$.
 - a) Bewijs dat f minimaal één nulpunt heeft.
 - b) Bewijs dat f maximaal drie nulpunten heeft.

Z.O.Z.

5. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare functie zijn. We bekijken de functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

- a) Toon aan dat er een constante $M > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in [a, b]$ met $x \leq y$ geldt:

$$-M(y - x) \leq F(y) - F(x) \leq M(y - x).$$

- b) Toon aan dat F uniform continu is op $[a, b]$.

Bonusopgave:

- c) Toon aan dat er een $c \in [a, b]$ bestaat zo dat

$$\int_a^c f(t) dt = \int_c^b f(t) dt.$$

6. Op $[0, 1]$ definiëren we de functierij $(f_n(x))$ door:

$$f_n(x) = \frac{n}{n + x^2}, n \geq 1.$$

Bepaal de puntsgewijze limietfunctie $f(x)$ en ga vervolgens na of er ook sprake is van uniforme convergentie op $[0, 1]$.

7. Bereken de volgende integraal (en rechtvaardig alle stappen die je daarbij neemt!):

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n} dx.$$

Normering:

1 : a) 3	2 : 4	3 : 5	4 : a) 2	5 : a) 3	6 : 3	7 : 5
b) 4			b) 4	b) 3		
				c) 4		
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
7	4	5	6	10	3	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$