

Geef altijd voldoende uitleg bij je antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine, een formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Ga na of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

a) Laat (a_n) en (b_n) rijen zijn met positieve getallen.

Als de reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ convergeren, dan convergeert $\sum \sqrt{a_n b_n}$ ook.

b) Laat (a_n) en (b_n) Cauchy-rijen zijn met $b_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Dan is de rij (a_n/b_n) ook een Cauchy-rij.

2. Toon aan, met behulp van de limietdefinitie, dat de rij

$$\left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + n - 1} \right)_{n=1}^{\infty}$$

convergeert met limiet 2.

3. Voor ieder tweetal reële getallen a en b definiëren we het getal $\max(a, b)$ door

$$\max(a, b) := \begin{cases} a & \text{als } a \geq b, \\ b & \text{als } a < b. \end{cases}$$

a) Toon aan dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}|a - b|.$$

Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ twee continue functies zijn.

b) Toon aan dat de functie $\max(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

continu is op $\mathbb{R}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn een differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en een constante $c > 0$ met de eigenschap dat $f'(x) \geq c$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- a) Toon aan dat voor alle $x \geq 0$ geldt: $f(x) \geq f(0) + cx$.
- b) Op dezelfde manier kan worden afgeleid dat voor alle $x \leq 0$ geldt:
 $f(x) \leq f(0) + cx$. [Dit hoef je niet te laten zien!]
 Toon aan dat f een bijectie is (d.w.z. injectief en surjectief is) van $\mathbb{R}$ op $\mathbb{R}$.
- c) De inverse van f noemen we g . Toon aan dat voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt

$$0 < g'(y) \leq \frac{1}{c}.$$

5. Gegeven zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. We beschouwen een continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$.

- a) Toon aan, door gebruik te maken van ondersommen, dat $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- b) Toon aan: als f niet overal gelijk is aan nul, dan bestaat er een $p > 0$ en een tweetal punten $c, d \in [a, b]$ met $c < d$ zó dat $f(x) \geq p$ voor alle $x \in [c, d]$.
- c) Toon aan:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \implies f = 0.$$

6. De functierij $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ wordt op $[0, 1]$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}.$$

- a) Toon aan dat de functierij $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ uniform convergent is op $[0, 1]$.
- b) Onderzoek of de functiereeks $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ uniform convergent is op $[0, 1]$.

Normering:

1 : 4	2 : 4	3 : a) 1 b) 4	4 : a) 2 b) 3 c) 3	5 : a) 2 b) 4 c) 3	6 : a) 3 b) 3
_____	_____	_____	_____	_____	_____
4	4	5	8	9	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$