

Normering:

$1a:5$; $2a:4$; $3a:3$; $4:6$; $5a:4$
 $b:5$; $b:5$; $b:6$; $b:4$
 $c:3$

Eindcijfer = (totaal+5)/5

1. (a) U weet dat tussen ieder tweetal reële getallen een rationaal getal ligt. Er geldt ook: tussen ieder tweetal rationale getallen ligt een irrationaal getal. Bewijs dit.
 (b) Laat f en g continue functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zijn, met de eigenschap dat $f(x) - g(x)$ rationaal is voor alle x . Bewijs dat $f - g$ een constante functie is.
2. Laat $\{a_k\}$ een rij reële getallen zijn met de eigenschap dat $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k$ convergeert.
 (a) Bewijs dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent is.
 (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat, in de gegeven situatie, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ niet absoluut convergent hoeft te zijn.
3. Laat $\{a_k\}$ een rij reële getallen zijn met de eigenschap dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent is. Laat $0 < t < 1$.
 (a) Bewijs dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ convergent is.
 (b) Definieer, voor $k = 1, 2, \dots$, $f_k(t) = a_k t^k$. Bewijs dat $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform convergent is op $[0, 1]$

Hint: gebruik de formule van Abel:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m} (b_{k+1} - b_k),$$

waar

$$A_{n,m} = \sum_{k=m}^n a_k.$$

- (c) Bewijs dat $\lim_{t \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
4. Laat f en g tweemaal differentieerbare functies zijn op het gesloten interval $[a, b]$ en laat $f(x) > g(x)$ voor alle $x \in (a, b)$. Laat verder $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) = g'(a)$, $f'(b) = g'(b)$.
 Bewijs dat er punten x_1 en x_2 zijn, met $a \leq x_1 < x_2 < b$, zodat $f''(x_1) > g''(x_1)$ en $f''(x_2) < g''(x_2)$.
5. Onderzoek of de volgende (oneigenlijke) integralen bestaan:

(a) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx;$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{x^3 + 1} dx.$