

Normering:

$$\begin{array}{l} 1:8 \quad ; \quad 2a:2 \quad ; \quad 3:5 \quad ; \quad 4:5 \quad ; \quad 5:5 \\ \quad \quad \quad ; \quad b:2 \\ \quad \quad \quad c:3 \\ \quad \quad \quad d:5 \end{array}$$

Eindcijfer = (totaal+5)/4

1. Laat f en g differentieerbare functies zijn op $[a, b]$ (in de randpunten worden de eenzijdige afgeleiden bedoeld) en laat f' en g' continue functies zijn. Veronderstel dat $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) > g'(a)$, $f'(b) > g'(b)$.

Bewijs dat er een punt $c \in (a, b)$ is met de eigenschap dat

$$f(c) = g(c) \quad \text{en} \quad f'(c) \leq g'(c).$$

2. Voor $n = 1, 2, \dots$ is de functie $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^4}.$$

- (a) Bewijs dat er een functie $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is zo, dat $f_n \rightarrow F$ puntsgewijs als $n \rightarrow \infty$.
 (b) Is de convergentie $f_n \rightarrow F$ ook uniform?
 (c) Bewijs dat F Riemann-integreerbaar is op $[-1, 1]$.
 (d) Bewijs dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \int_{-1}^1 F(x) dx.$$

3. De rij reële getallen $\{a_k\}$ wordt recursief gedefinieerd door

$$a_1 = a_2 = 1; \quad a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{3} \quad (k \geq 2).$$

Bewijs dat de rij convergeert en bereken de limiet.

4. Onderzoek de convergentie van de oneigenlijke integraal

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

5. Bewijs op basis van de (ε, δ) -limietdefinitie dat

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x+1} = \frac{2}{\pi+2}.$$

U mag hier alle gangbare rekenregels voor goniometrische functies gebruiken, mits u precies specificeert wat u gebruikt.