

Faculteit der Exacte Wetenschappen	tentamen Wiskundige Analyse 1
Afdeling Wiskunde	29-05-2008
Vrije Universiteit	08:45-10:45 uur

Gebruik van rekenmachine, formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan

1. Laat (a_n) een rij zijn met de eigenschap dat voor alle $n \geq 2$ geldt:

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|.$$

Toon aan dat (a_n) een Cauchy-rij is.

2. Toon aan m.b.v. de (ϵ, δ) -limietdefinitie dat

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x^2+1} = 1.$$

3. Laat f en g continue functies zijn op $[0,1]$ en differentieerbare functies op $(0,1)$.
Gegeven is dat $f(0) = g(1)$ en $f(1) = g(0)$.

- a) Bewijs dat er een $c \in [0,1]$ bestaat zodat $f(c) = g(c)$.
[Aanwijzing: voer een functie $h = f - g$ in.]
- b) Bewijs dat er een $d \in (0,1)$ bestaat zodat $f'(d) = -g'(d)$.
[Aanwijzing: voer een functie $k = f + g$ in.]

Z.O.Z.

4. Gegeven is voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx.$$

Toon aan dat:

- a) $I_{n+1} \leq I_n$,
 - b) $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$,
 - c) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ bestaat en gelijk is aan 0.
5. Bepaal van de onderstaande functierijen (f_n) , $n \geq 1$ de puntsgewijze limiet op $[0, 1]$.
Ga vervolgens na of er ook sprake is van uniforme convergentie op $[0, 1]$.
- a) $f_n(x) = x^2(1 - x^n)$.
 - b) $f_n(x) = \frac{n+1}{n} \arctan x$.

Normering:

1 : 4	2 : 4	3 : a) 3 b) 3	4 : a) 2 b) 3 c) 2	5 : a) 3 b) 3
_____	_____	_____	_____	_____
4	4	6	7	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{3} + 1$$