Tentamen
Wiskundige Analyse I

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit, Amsterdam

Datum: 26-08-2005
Alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd. Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

(1) Bepaal voor welke $K > 0$ de integraal

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} - \frac{K}{x+1} \right) dx$$

convergeert.

(2) In $C[0,1]$ is de rij functies (f_n) gegeven door

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^4},$$

waarbij $n \geq 1$.
(a) Bepaal de puntsgewijze limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(b) Toon aan dat de rij (f_n) uniform convergeert op $[0,1]$.
(c) Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{n^4 + x^4}\, dx.$$

(3) (a) Laat (a_n) een rij van positieve getallen zijn, en stel dat
(i) (a_n) is monotoon dalend;
(ii) $(a_n) \to 0$.
Bewijs dat voor elke $n \geq m$ geldt

$$\left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| \leq a_m.$$

(b) Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

uniform convergent is op elk begrensd interval $[0,a]$, maar niet absoluut convergent voor enige waarde van x.

(4) Laat (X,d) een metrische ruimte zijn met dichte deelverzameling A. Onderstel dat voor elke Cauchyrij (b_n) van elementen van A er een element $x \in X$ bestaat zodat $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. Zij (x_n) een willekeurige Cauchyrij in X.

Z.O.Z

(a) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ een element $a_n \in A$ bestaat met $d(a_n, x_n) < 2^{-n}$.
(b) Bewijs dat de rij (a_n) Cauchy is.
(c) Bewijs dat de rij (x_n) convergeert.

Normering

1	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c
6	3	5	2	6	4	2	4	4

$$\text{eindcijfer} = \frac{\#\ \text{punten} + 4}{4}.$$