

Beoordeling: startwaarde is 0.2; elk goed onderdeel levert 1.4 punt op.

Beantwoordingsinstructie: 8 opgaven, maar 7 goede antwoorden leveren al de maximale score op.

Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

Lees eerste alle opgaven eens rustig door.

De opgaven hoeven natuurlijk niet in de opgegeven volgorde te worden gemaakt.

Alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd.

1. Neem aan dat er een $M > 0$ en een $a > 1$ is zodat $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^a$ voor alle x en y in een interval. Bewijs dat f constant is op dat interval.
2. Zij f een differentieerbare functie op $[a, b]$, maar f' is niet noodzakelijkerwijs continu. Zij d een getal zodat $f'(a) < d < f'(b)$. Bewijs dat er een punt $c \in (a, b)$ is zodat $f'(c) = d$.
Aanwijzing: bekijk eerst het geval $d = 0$ en herleid het algemene geval tot dit speciale geval.
3. Neem aan dat $f \in C^2(\mathbb{R})$ en dat $f''(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
Bewijs of weerleg: f is een onbegrensde functie.
4. Zij $f \in C([0, 1])$ en $f(0) = f(1)$. Bewijs dat er een $c \in (0, 1)$ is zodat $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
Aanwijzing: bekijk de functie $f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ op een relevant interval.
5. Bepaal voor alle $x \in \mathbb{R}$ of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + n}$$

convergent of divergent is.

6. De rij (a_n) is gegeven door $a_0 = 1$ en $a_{n+1} = \frac{1}{4} - a_n^2$ voor $n \geq 0$.
Bewijs dat de rij a_n convergent is en bepaal de limiet.
Aanwijzing: teken een plaatje, bereken a_1 , a_2 en a_3 , en gebruik een dek/fixpunt argument.
7. Gegeven is de rij

$$a_n = \int_0^1 \frac{x + e^{x/n}}{x^2 + 1} dx.$$

Bepaal de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

8. Bewijs dat er precies één continue functie f op $[0, 1]$ bestaat zodat

$$f(x) = 1 + \int_{x/2}^x e^{-f(s)} ds.$$

Aanwijzing: beschouw eerst het teken van een mogelijke oplossing en beperk je vervolgens tot functies met dit teken.