

Uitwerking tentamen 22 augustus 2003

1. (a) De bewering is onjuist. Een tegenvoorbeeld is $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ is convergent vanwege de Leibniz test (de termen alterneren en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ daalt naar 0), terwijl de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeert.
 - (b) De bewering is juist. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan gaan de termen a_n naar nul, dus de termen zijn begreind, zeg $|a_n| < M$ voor een grote M . Omdat $a_n > 0$ kunnen we het vergelijkingscriterium gebruiken: $a_n^2 < M a_n$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n = M \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, convergeert ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
 - (c) De bewering is juist. Als f differentieerbaar is dan is f ook continu. Merk op dat $([f(x)]^2)' = 2f(x)f'(x) < 0$ op $[0, 1)$, dus is $f(x) \neq 0$ op $[0, 1)$. Omdat f continu is, is f overal positief of overal negatief. Als $f > 0$ dan is $f' < 0$, immers $2ff' < 0$, en dan is f dalend en van beneden begreind, dus $f(x)$ convergeert als $x \rightarrow 1^-$. Anderzijds, als $f < 0$ dan is $f' > 0$, en derhalve is f stijgend en van boven begreind, dus $f(x)$ convergeert als $x \rightarrow 1^-$.
2. (a) $x_2 = 1$ en $x_3 = \frac{1}{2}$. Nu gebruiken we volledige inductie: we nemen aan dat $x_n \in (0, 1)$ voor zekere $n \geq 3$ en laten zien dat volgt dat $x_{n+1} \in (0, 1)$. Namelijk $x_{n+1} = x_n(1 - x_n) + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} > 0$ en $x_{n+1} = x_n(1 - x_n) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{4}$ voor $n \geq 2$, want de parabool $x(1 - x)$ heeft maximum $\frac{1}{4}$. Waarmee bewezen is dat $0 < x_n < 1$ voor $x_n \geq 3$. Bovendien $x_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ voor $n \geq 6$.
 - (b) Als $x_n > \frac{1}{\sqrt{n}}$ voor een $n \geq 6$, en dus ook $x_n < \frac{1}{2}$, dan is $x_n(1 - x_n) > \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$, want $f(x) = x(1 - x)$ is een strikt stijgende functie op $[0, \frac{1}{2}]$. Dus

$$x_{n+1} > \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Daarnaast geldt

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) + \frac{1}{n} = x_n - x_n^2 + \frac{1}{n} < x_n - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{n} = x_n.$$

- (c) Er zijn twee mogelijkheden:

- i. of $x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ voor alle $n \geq 6$,
- ii. of $x_m > \frac{1}{\sqrt{m}}$ voor zekere $m \geq 6$.

In het eerste geval geldt $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ voor alle $n \geq 6$, en omdat $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ geldt dat ook x_n convergeert met limiet 0.

In het tweede geval volgt uit onderdeel (b) dat $0 < x_{n+1} < x_n < \frac{1}{2}$ voor alle $n \geq m$. Omdat x_n een uiteindelijk monotoon dalende rij is die van beneden begreind is door 0 convergeert de rij x_n . We moeten nu nog de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \in [0, \frac{1}{2}]$ bepalen. Neem nu in de vergelijking

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) + \frac{1}{n}$$

de limit $n \rightarrow \infty$. Dan vinden we $\ell = \ell(1 - \ell)$, oftewel $\ell = 0$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3. (a) Dat f_n uniform naar f convergeert impliceert dat voor voldoende grote N geldt $\|f_n - f\| < 1$ voor alle $n \geq N$. Met de driehoekongelijkheid (voor $n \geq N$):

$$\|f\| = \|f - f_n + f_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq 1 + \|f_n\|.$$

Dus f is begrensd, immers $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Aan de andere kant geldt ook dat $\|f_n\| \leq \|f\| + 1$ voor $n \geq N$, dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \leq \max\{\|f_1\|, \|f_2\|, \dots, \|f_{N-1}\|, \|f\| + 1\} = K,$$

oftewel $|f_n(x)|$ is uniform begrensd door K .

- (b) We hebben bij (a) laten zien dat er een $K > 0$ is zodat $|f_n(x)| \leq K$ voor alle $x \in [a, b]$ en $n \in \mathbb{N}$ en ook $|f(x)| \leq K$ voor alle $x \in [a, b]$. De continue functie g is uniform continu op het interval $[-K, K]$, want een continue functie op een gesloten interval is uniform continu. Dat wil zeggen: neem $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan is er een $\delta > 0$ zodat $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ voor alle $x, y \in [-K, K]$ met $|x - y| < \delta$. Omdat f_n uniform naar f convergeert is er een $N > 0$ zodat $\|f_n - f\| < \delta$ voor $n \geq N$. Dus voor $n \geq N$ geldt

$$\|g(f_n) - g(f)\| = \sup_{x \in [a,b]} |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon,$$

want $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \delta$. Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig was hebben hiermee laten zien dat $g(f_n) \rightarrow g(f)$ uniform op $[a, b]$.

- (c) Een voor de hand liggende keuze is $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}$ en $g(y) = ye^{-y}$, zodat $h_n(x) = g(f_n(x))$. We berekenen eerst de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{nx+1} = x$. Deze convergentie is uniform op $[0, 1]$, want

$$\left\| \frac{nx^2}{nx+1} - x \right\| = \left\| \frac{x}{nx+1} \right\| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{nx+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Dat $\sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{nx+1} = \frac{1}{n+1}$ volgt uit het feit dat $\frac{x}{nx+1}$ een stijgende functie is op $[0, 1]$ (eenvoudig na te gaan door afgeleide uit te rekenen). Dus $f_n \rightarrow x$ uniform op $[0, 1]$. Dan volgt uit onderdeel (b) dat $h_n(x) \rightarrow g(x) = xe^{-x}$ als $n \rightarrow \infty$ uniform op $[0, 1]$.

- (d) Omdat de h_n uniform naar xe^{-x} convergeert op $[0, 1]$, mogen we de limiet en integraal verwisselen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^2 e^{-\frac{nx^2}{nx+1}}}{nx+1} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 e^{-\frac{nx^2}{nx+1}}}{nx+1} dx = \int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}.$$

De laatste integraal rekenen we uit met behulp van partiaal integreren:

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1.$$