



Faculteit Exacte Wetenschappen  
Vrije Universiteit

Hertentamen  
Wiskundige Analyse 1

voor studenten Wiskunde

Datum: 22-08-03, 13.30-15.30

Aantal opgaven: 4

Beantwoordingsinstructie: licht Uw antwoorden duidelijk toe.

1. Bewijs dat in  $\mathbb{R}$  elke monotoon dalende rij positieve getallen convergeert.

2. Laat  $x_1 = 1$  en  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n) + \frac{1}{n}$  voor elke  $n \geq 1$ .

(i) Bewijs dat  $0 < x_n < 1$  voor alle  $n > 1$  en dat  $x_n < \frac{1}{2}$  voor alle  $n \geq 5$ .

(ii) Neem aan dat er een  $n \geq 5$  is zo dat  $x_n > \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Bewijs dat  $x_n > x_{n+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

(iii) Bewijs dat de rij  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  convergeert en bepaal de limiet.

Hint: de aanname van (ii) geldt wel of geldt niet.

3. De functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is continu. Laat zien dat er precies één differentieerbare functie  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is waarvoor geldt dat  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (x-s)f(s)ds$  als  $x \neq 0$ . Bepaal hiertoe ook  $F(0)$  en  $F'(0)$ .

4. De verzameling  $C([0, 1])$  van continue functies  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  is met de norm  $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$  een volledige genormeerde lineaire ruimte. Hoeveel functies  $f$  in  $C([0, 1])$  zijn er waarvoor geldt dat  $f(x) = x + \frac{1}{2}f(x^2)$  voor alle  $x \in [0, 1]$ ?

Eindcijfer is het totaal aantal behaalde punten: som 1,3,4 twee punten, som 2 drie punten, één punt gratis.