

Uitwerking tentamen 27 mei 2003

1. (a) Kies een y , bijvoorbeeld $y = 0$. Dan $|f(x) - f(0)| \leq M|x| \leq M$. Met de driehoeksongelijkheid $|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq M + |f(0)|$. Dus f is begrensd op $[0, 1]$. Je kunt ook eerst onderdeel (b) doen en dan (a) bewijzen door een beroep te doen op de stelling dat continue functies op een gesloten interval begrensd zijn.
- (b) Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon/M$. Dan geldt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ als $|x - y| < \delta$, dus je ziet onmiddellijk via de definitie dat f continu is op $[0, 1]$.
- (c) De aanname is dat f en g Lipschitz zijn, dus er zijn getallen M_1 en M_2 zodat $|f(x) - f(y)| \leq M_1|x - y|$ en $|g(x) - g(y)| \leq M_2|x - y|$ voor alle $x, y \in [0, 1]$. Omdat f en g begrensd zijn (zie (a)), zijn er bovendien getallen K_1 en K_2 zodat $|f(x)| \leq K_1$ en $|g(x)| \leq K_2$ voor alle $x \in [0, 1]$. En nu

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)[g(x) - g(y)] + [f(x) - f(y)]g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)|. \end{aligned}$$

Dus met behulp van het bovenstaande: $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq (K_1M_2 + M_1K_2)|x - y|$, oftewel het product fg is Lipschitz.

- (d) Het probleem zit in de buurt van 0. Neem $x > 0$ klein en $y = 0$, dan zie je dat $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \frac{1}{\sqrt{x}}x = \frac{1}{\sqrt{x}}|x - y|$. Omdat je x willekeurig klein kunt nemen bestaat er dus geen $M > 0$ zodat $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, want neem maar $y = 0$ en $0 < x < 1/M^2$, dan is niet aan de ongelijkheid voldaan. Dus $f(x) = \sqrt{x}$ is niet Lipschitz op $[0, 1]$.
2. (a) De convergentie straal is $R = 1$ want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(10 - (n-1)^2)}{1/(10 - n^2)} = 1$. Dus de reeks is convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| > 1$. De waarden $x = \pm 1$ moet je apart bekijken. Eerst $x = 1$: via de vergelijkingstest concludeer je dat de reeks convergent is want $0 < \frac{1}{n^2 - 10} < \frac{1}{2n^2}$ voor grote n , en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ is convergent. Nu $x = -1$: de reeks is nu absoluut convergent (zie voorgaande geval) dus zeker (gewoon) convergent. Conclusie de reeks is convergent voor $x \in [-1, 1]$ en divergent voor $|x| > 1$.
- (b) Met de substitutie $y = \log x$ krijgen we $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$. De convergentiestraal van die machtreeks is $R = 1$ want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1$, dus de reeks is convergent voor $|y| < 1$ en divergent voor $|y| > 1$. Het speciale geval $y = -1$ is convergent want dat is een alternerende reeks waarvan de termen naar nul dalen. Het geval $y = 1$ is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, dus divergent. We zien dus dat de reeks convergent is voor $y \in [-1, 1)$, oftewel voor $x \in [\frac{1}{e}, e)$. De reeks is divergent voor alle andere waarden van x .
- (c) Voor (a): we kunnen de stelling gebruiken die zegt dat als $\|f_n\| \leq M_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform. In dit geval $f_n = \frac{x^{n+1}}{10 - n^2}$, dus op het interval van convergentie $[-1, 1]$ geldt: $\|f_n\| = \frac{1}{10 - n^2}$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10 - n^2}$ convergeert (zie het vergelijkingscriterium dat bij (a) is gebruikt), is de convergentie van de functiereeks dus uniform op $[-1, 1]$.

Voor (b): we kunnen het criterium gebruiken dat de reeks uniform convergeert dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ er een N is zodat $\|\sum_{k=n}^m \frac{(\log x)^k}{k}\| < \varepsilon$ voor alle $m > n > N$. Maar $\sup_{x \in [e^{-1}, e]} |\sum_{k=n}^m \frac{(\log x)^k}{k}| \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} > (m - n) \frac{1}{m}$, want laat x naar e naderen. Dus $\|\sum_{k=n}^m \frac{(\log x)^k}{k}\|$ wordt niet klein voor grote n en m , bijvoorbeeld $n = m/2$ geeft $\|\sum_{k=m/2}^m \frac{(\log x)^k}{k}\| > 1/2$ voor m willekeurig groot. Dus de convergentie is niet uniform.

3. (a) Twee maal partiëel integreren geeft

$$\begin{aligned}\int_0^\pi n^2 e^{-nx} \sin x \, dx &= -ne^{-nx} \sin x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi ne^{-nx} \cos x \, dx \\ &= -ne^{-nx} \sin x \Big|_0^\pi - e^{-nx} \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{-nx} \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Grenzen invullen en de laatste term naar de andere kant halen geeft:

$$\int_0^\pi (n^2 + 1)e^{-nx} \sin x \, dx = 1 + e^{-n\pi},$$

oftewel $\int_0^\pi f_n = \int_0^\pi n^2 e^{-nx} \sin x \, dx = \frac{n^2}{n^2+1}(1 + e^{-n\pi})$.

- (b) Met behulp van (a) zie je dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1}(1 + e^{-n\pi}) = 1$. Anderzijds, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-nx} \sin x = 0$, want voor $x = 0$ is $f_n(0) = 0$ voor alle n , en voor $x > 0$ “wint” de exponent e^{-nx} het van de macht n^2 . Dus $\int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_0^\pi 0 = 0$.
- (c) Als f_n uniform naar f zou convergeren op $[0, \pi]$ dan zou je de limiet en de integraal mogen verwisselen. Maar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n \neq \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, dus de convergentie is niet uniform.