

1. Geef de definities van elk van de onderstaande begrippen.

- (i) De rij reële getallen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchyrij als ...
- (ii) De rij functies $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) is uniform convergent als ...
- (iii) De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ als ...
- (iv) De functie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ is uniform continu op $A \subset \mathbb{R}$ als ...
- (v) De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}$ als ...

2. Bewijs met 1(i): de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gedefinieerd door $x_n = \frac{n}{1+n}$ is een Cauchyrij.

3. Bewijs of weerleg: de rij functies $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) gedefinieerd door $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ is uniform convergent.

4. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar of niet waar zijn. Motiveer uw antwoorden.

- (i) f is continu in 0.
- (ii) f is differentieerbaar in 0.
- (iii) f is uniform continu op $[-1, 1]$.
- (iv) f is uniform continu op $\mathbb{R}$.

5. Bewijs dat een convergente rij reële getallen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ maar één limiet heeft.

6. De rij continue functies $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) is uniform convergent en voor elke n bestaat $L_n = \lim_{x \downarrow 0} f_n(x)$. Bewijs dat de limieten $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ bestaan en gelijk zijn.

7. Bewijs: als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en de limieten $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ bestaan, dan is f uniform continu op $\mathbb{R}$.

8. De rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ wordt gedefinieerd door $x_1 = 1$ en $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n}}$. Is deze rij convergent?

1: 5. 2: 3. 3: 3. 4: 4. 5: 3. 6: 4. 7: 4. 8: 4. Cijfer 1 plus totaal gedeeld door 3. Boven de 10 wordt afgerond naar 10.