

1. Laat $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Bij deze opgave mag gebruikt worden dat elke rij reële getallen $(x_n)_{n=1}^\infty$ die bevat is in het interval $[0, 1]$ een convergente deelrij heeft met limiet in $[0, 1]$.

(i) Bewijs dat als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $[0, 1]$ convergeert naar x_0 , de rij $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ convergeert naar $f(x_0)$ (10 punten).

Uitwerking. Tenzij anders vermeld zijn hieronder $j, k, n, m, N \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Gegeven is dat $0 \leq x_n \leq 1$ en $x_n \rightarrow x_0$ dus

$$\forall m \exists N \forall n \geq N \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{m}. \quad (*)$$

Omdat

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k,$$

en

$$\forall n \quad 0 \leq \sup_{k \geq n} x_k \leq 1,$$

volgt dat

$$0 \leq \inf_n \sup_{k \geq n} x_k \leq 1,$$

en dus dat $0 \leq x_0 \leq 1$. We moeten bewijzen dat $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Omdat f continu is in x_0 geldt

$$\forall k \exists m \forall x \in [0, 1] \quad |x - x_0| < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{k}. \quad (**)$$

Neem k even vast en gebruik (*). Dan is er dus een N zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{m}$ en dus, op grond van (**), $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{1}{k}$. Dit kunnen we doen voor elke k , dus we hebben bewezen dat

$$\forall k \exists N \forall n \geq N \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \frac{1}{k}$$

m.a.w. $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

(ii) Bewijs dat f uniform continu is op $[0, 1]$ (15 punten).

Uitwerking. We moeten laten zien dat

$$\forall k \exists m \forall x, y \in [0, 1] \quad |x - y| < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{k}. \quad (*)$$

Stel dat dit niet het geval is, dan is er een k waarvoor geen bijbehorende m te vinden is in (*), m.a.w.

$$\exists k \forall m \exists x, y \in [0, 1] \quad |x - y| < \frac{1}{m} \quad \text{en} \quad |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{k}. \quad (**)$$

Noem de bij m horende x en y nu x_m en y_m . Zo hebben we dan twee rijen $(x_m)_{m=1}^\infty$ en $(y_m)_{m=1}^\infty$ in $[0, 1]$. Nu mogen we gebruiken dat $(x_m)_{m=1}^\infty$ een convergente deelrij heeft, zeg $(x_{m_j})_{j=1}^\infty$, waarin $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, met limiet $x_0 \in [0, 1]$. O.g.v. (i) volgt dat $f(x_{m_j}) \rightarrow f(x_0)$ als $j \rightarrow \infty$. Maar ook de deelrij $(y_{m_j})_{j=1}^\infty$ is convergent met dezelfde limiet x_0 want

$$|y_{m_j} - x_0| \leq |y_{m_j} - x_{m_j}| + |x_{m_j} - x_0| < \frac{1}{m_j} + |x_{m_j} - x_0| \rightarrow 0$$

als $j \rightarrow \infty$. Dus, weer op grond van (i), $f(y_{m_j}) \rightarrow f(x_0)$ en

$$f(x_{m_j}) - f(y_{m_j}) \rightarrow f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

in tegenspraak met

$$|f(x_{m_j}) - f(y_{m_j})| \geq \frac{1}{k}.$$

(iii) Bewijs dat f op elk interval $[a, b] \subset [0, 1]$ een maximum en een minimum aanneemt (10 punten).

Uitwerking. Laat

$$A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [0, 1] \quad f(x) = y\}$$

het beeld onder f van $[0, 1]$ zijn.

Als A naar boven begrensd is dan heeft A een kleinste bovengrens $M = \sup A$. Elke $M - \frac{1}{k}$ is dan geen bovengrens dus is er een $y = f(x)$ met $x \in [0, 1]$ en $M \geq f(x) > M - \frac{1}{k}$. Noem deze x nu x_k .

Als A niet naar boven begrensd is dan is geen enkele k een bovengrens en is er een $x \in [0, 1]$ met $f(x) > k$. Noem ook deze x weer x_k . In beide gevallen hebben we zo een rij $(x_k)_{k=1}^\infty$. Deze rij heeft een convergente deelrij $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ met limiet $x_0 \in [0, 1]$ en dus o.g.v. (i) volgt weer dat $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x_0)$. De rij $(f(x_{k_j}))_{j=1}^\infty$ is daarmee begrensd. Dit sluit het het geval dat A onbegrensd is uit want daaruit zou de tegenspraak volgen dat $f(x_{k_j}) > k_j \geq j$. Dus we hebben dat $M \geq f(x_{k_j}) > M - \frac{1}{k_j} \geq M - \frac{1}{j}$ en dus $f(x_{k_j}) \rightarrow M$. Omdat

ook $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x_0)$ volgt $M = f(x_0)$. Het supremum M wordt dus aangenomen door $f(x_0)$ en is daarmee een maximum.

Voor het minimum herhalen we dit argument toegepast op $-f$. Dit maximum en minimum noteren we als

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{resp.} \quad \min_{a \leq x \leq b} f(x),$$

en we definiëren voor $n = 1, 2, 3, \dots$ de ondersommen en bovensommen

$$s_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \min_{\frac{j-1}{2^n} \leq x \leq \frac{j}{2^n}} f(x) \quad \text{en} \quad S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \max_{\frac{j-1}{2^n} \leq x \leq \frac{j}{2^n}} f(x).$$

(iv) Bewijs dat $s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (10 punten).
Uitwerking. Noem het interval $[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ even I_n^j . Dan volgt dat

$$I_n^j = I_{n+1}^{2j-1} \cup I_{n+1}^{2j}.$$

De maxima van f op de twee intervallen rechts zijn kleiner of gelijk aan het maximum van f op het interval links. Evenzo zijn de minima van f op de intervallen rechts groter of gelijk aan het minimum van f op het interval links. Dus

$$\max_{x \in I_n^j} f(x) \geq \frac{1}{2} \max_{x \in I_{n+1}^{2j-1}} f(x) + \frac{1}{2} \max_{x \in I_{n+1}^{2j}} f(x).$$

Sommeren over j geeft

$$S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \max_{x \in I_n^j} f(x) \geq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left(\frac{1}{2} \max_{x \in I_{n+1}^{2j-1}} f(x) + \frac{1}{2} \max_{x \in I_{n+1}^{2j}} f(x) \right).$$

Het rechterlid is gelijk aan

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=1}^{2^n} \left(\max_{x \in I_{n+1}^{2j-1}} f(x) + \max_{x \in I_{n+1}^{2j}} f(x) \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \max_{x \in I_{n+1}^k} f(x) = S_{n+1},$$

omdat in de linkersom precies alle intervallen $I_{n+1}^1, I_{n+1}^2, \dots, I_{n+1}^{2^{n+1}}$ voorkomen. Conclusie: $S_n \geq S_{n+1}$. Door in het bovenstaande S door s en $\geq$ door $\leq$ te vervangen volgt $s_n \leq s_{n+1}$. Tenslotte volgt uit de definitie onmiddellijk dat elke $s_n \leq S_n$ (en $s_{n+1} \leq S_{n+1}$). In

een keten van ongelijkheden geschreven zien we dus dat $s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$.

(v) Op grond van (iv) zijn de rijen $(s_n)_{n=1}^\infty$ en $(S_n)_{n=1}^\infty$ convergent. Bewijs dat de limieten gelijk zijn (10 punten).

Uitwerking. We moeten bewijzen dat $S_n - s_n \rightarrow 0$. We hebben

$$S_n - s_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left(\max_{\frac{j-1}{2^n} \leq x \leq \frac{j}{2^n}} f(x) - \min_{\frac{j-1}{2^n} \leq x \leq \frac{j}{2^n}} f(x) \right).$$

Omdat f uniform continu is kunnen we elk van de termen in deze som kleiner maken dan $\frac{1}{k}$ door 2^n groter te nemen dan m in de definitie van uniforme continuïteit, zie (*) in de uitwerking van 1(ii) hierboven. Neem dus N met $2^N > m$, dan is voor elke $n \geq N$

$$0 \leq S_n - s_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Dit kan voor elke k dus $S_n - s_n \rightarrow 0$.

(vi) De gemeenschappelijke limiet in (v) noteren we als $\int_0^1 f(x)dx$. Bewijs dat $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)|dx$ (10 punten).

Uitwerking. We hebben

$$|S_n| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} |\max_{x \in I_n^j} f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \max_{x \in I_n^j} |f(x)|.$$

Noem de rechtersom T_n . O.g.v. het voorgaande volgt dat $T_n \rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx$, $S_n \rightarrow \int_0^1 f(x)dx$, terwijl $-T_n \leq S_n \leq T_n$. Voor de limieten volgt

$$-\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx,$$

ofwel $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)|dx$.

2. (i) Geef de definitie van uniforme convergentie van een rij functies $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) (5 punten).

Antwoord. Deze rij is uniform convergent als er een functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is zo dat

$$\forall m \exists N \forall n \geq N \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}.$$

(ii) Bewijs dat de limietfunctie f van een uniform convergente rij continue functies $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en dat $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ als $n \rightarrow \infty$ (10 punten).

Uitwerking. Laat $y \in [0, 1]$. We moeten $|f(x) - f(y)|$ klein krijgen door $|x - y|$ klein te maken. Gebruik

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

De eerste en derde term zijn kleiner dan $\frac{1}{m}$ als $n \geq N$ met N als in het antwoord op 2(i). Neem $n = N$. Omdat f_N continu is in y is er een k zo dat de middelste term kleiner is dan $\frac{1}{m}$ als $|x - y| < \frac{1}{k}$. Hiermee is nu $|f(x) - f(y)| < \frac{3}{m}$. Dit kan voor elke m van de vorm $m = 3j$ en dus

$$\forall j \exists k \forall x \in [0, 1] \quad |x - y| < \frac{1}{k} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{j}.$$

Conclusie: f is continu in y .

Voor wat betreft de integralen, zowel de f_n als f zijn continu en dus bestaan de integralen. Omdat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{1}{m} \end{aligned}$$

als $n \geq N$, waarbij N gegeven wordt bij m door de definitie in 2(i), volgt dat $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$.

3. De continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar in $x = 0$. Bewijs dat de functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = \int_0^1 f(xy) y dy,$$

differentieerbaar is in $x = 0$ en druk $g'(0)$ uit in $f'(0)$ (20 punten).

Uitwerking. De functie g is goed gedefinieerd omdat f continu is en de integraal dus bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}$. De differentieerbaarheid van f in 0 betekent dat

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R(x),$$

waarbij voor $R(x)$ geldt dat

$$\forall n \exists m \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x| < \frac{1}{m} \Rightarrow |R(x)| \leq \frac{1}{n} |x|.$$

Merk op dat $R(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x$ continu is. Voor g volgt nu

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 (f(0) + f'(0)xy + R(xy)) y dy \\ &= \int_0^1 f(0)y dy + \int_0^1 f'(0)xy^2 dy + \int_0^1 R(xy)y dy \\ &= \frac{f(0)}{2} + \frac{f'(0)}{3}x + P(x), \end{aligned}$$

met

$$P(x) = \int_0^1 R(xy)y dy.$$

Voor elke n hebben we dat $|R(xy)| \leq \frac{1}{n}|xy|$ als $0 < |xy| < \frac{1}{m}$, dus zeker als $0 < |x| < \frac{1}{m}$ en $0 < y \leq 1$. De ongelijkheid geldt ook voor $y = 0$. Dan is o.g.v. 1(vi)

$$|P(x)| \leq \int_0^1 |R(xy)|y dy \leq \int_0^1 \frac{1}{n}|xy|y dy = \frac{1}{n}|x| \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3n}|x|.$$

Conclusie: g is differentieerbaar in 0 en $g'(0) = \frac{f'(0)}{3}$.

Totaal plus 10 gedeeld door 10 geeft het eindcijfer.