



1. Gegeven is de volgende functie:

$$f(x, y) = y^3 + x^2y - 2xy$$

- Bepaal de stationaire punten van f en geef van elk stationair punt aan of het een minimum, een maximum of een zadelpunt is.
- Bepaal m.b.v. de multiplicatorenmethode van Lagrange de extremen van f onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 4$. In welk van deze extremen wordt een maximum en in welke een minimum van f op de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ aangenomen?
(N.B.: De nevenvoorwaarde is een begrensd en gesloten gebied.)

Hint: Gebruik de nevenvoorwaarde al vroeg in de berekening

2. Zij D het gebied ingesloten tussen de lijnen $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ en $y = \sqrt{1 - x^2}$. We zijn geïnteresseerd in de integraal

$$\int_{D_{x,y}} e^{x^2+y^2} dx dy$$

- Geef de Jacobimatrix van de coördinatentransformatie als we overgaan op poolcoördinaten.
 - Schets het gebied en los de integraal m.b.v. poolcoördinaten op.
3. Gegeven is een continu differentieerbare functie $z = f(x, y)$. Substitueer $x = u + v$ en $y = u - v$. Druk

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$$

uit is u , v , $\frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial z}{\partial v}$

4. Bereken de convergentiestraal van de volgende machtreeksen en geef aan voor welke waarden van x de machtreeks convergeert.

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n} \quad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n \ln n}{n^2 + 1}$$

Z.O.Z.

5. Laat $y(x)$ voldoen aan de differentiaal vergelijking

$$(x^2 + 1)y'' - xy' + 2y = 0$$

- a. Gegeven is dat $y(0) = 0$ en $y'(0) = 3$. Laat zien dat $y''(0) = 0$ en dat $y'''(0) = -3$
- b. Toon aan met de methode van Leibnitz-MacLaurin dat

$$y^{(n+2)}(0) + (n^2 - 2n + 2)y^{(n)}(0) = 0 \quad (n \geq 0)$$

- c. Geef onder de beginvoorwaarden van inderdeel a. de Maclaurinreeks voor de oplossing van de differentiaalvergelijking tot en met de term x^6 . Waarom bevat de MacLaurinreeks voor de oplossing geen termen met x^{2k} voor $k = 0, 1, 2, \dots$?

6. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \text{ en } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ 0 & \text{voor } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- a. Voor welke waarde van x met $-\pi \leq x \leq \pi$ geldt dat $f(x)$ niet gelijk aan de som van de Fourierreeks van f ? Wat is in dit punt de som van de Fourierreeks?
- b. Geef aan of de functie even of oneven is en geef de Fourierreeks van f .
- c. Teken op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van de functie die de door de gevonden reeks wordt voorgesteld.

7. Laat zien dat

$$u(x, t) = f(x)e^t$$

voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

als $f(x)$ voldoet aan de gewone differentiaalvergelijking

$$f''(x) - f(x) = 0$$

Normering

Vooraf	1	2	3	4	5	6	7	Totaal
	a b 4 4	a b 2 4		a b 3 3	a b c 2 4 3	a b c 2 4 2		
5	8	6	4	6	9	8	4	50

1. Laat $y(x)$ voldoen aan de differentiaal vergelijking

$$(x^2 + 1)y'' - xy' + 2y = 0$$

- a. Gegeven is dat $y(0) = 0$ en $y'(0) = 3$. Laat zien dat $y''(0) = 0$ en dat $y'''(0) = -3$
- b. Toon aan met de methode van Leibnitz-MacLaurin dat

$$y^{(n+2)}(0) + (n^2 - 2n + 2)y^{(n)}(0) = 0 \quad (n \geq 0)$$

- c. Geef onder de beginvoorwaarden van inderdeel a. de Maclaurinreeks voor de oplossing van de differentiaalvergelijking tot en met de term x^6 . Waarom bevat de MacLaurinreeks voor de oplossing geen termen met x^{2k} voor $k = 0, 1, 2, \dots$?

2. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \text{ en } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ 0 & \text{voor } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- a. Voor welke waarde van x met $-\pi \leq x \leq \pi$ geldt dat $f(x)$ niet gelijk aan de som van de Fourierreeks van f ? Wat is in dit punt de som van de Fourierreeks?
- b. Geef aan of de functie even of oneven is en geef de Fourierreeks van f .
- c. Teken op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van de functie die de door de gevonden reeks wordt voorgesteld.

3. Gegeven is de functie

$$f(x) = 1 + x \text{ voor } 0 \leq x \leq 2$$

- a. Vind de sinusreeks zodanig dat de som van de reeks gelijk is aan $f(x)$ voor $0 < x < 2$.
- b. Wat is er aan de hand in de punten $x = 0$ en $x = 2$.
- c. Hoe zou het nemen van een cosinusreeks in plaats van een sinusreeks hiervoor een oplossing bieden?

Z.O.Z.

4. Laat zien dat

$$u(x, t) = f(x)e^t$$

voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

als $f(x)$ voldoet aan de gewone differentiaalvergelijking

$$f''(x) - f(x) = 0$$

5. Voor een functie $u(x, t)$ van twee variabelen is de volgende partiële differentiaalvergelijking gegeven:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- a. We zijn op zoek naar een oplossing van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$. Geef met behulp van scheiding van variabelen de twee gewone differentiaalvergelijkingen waaraan $X(x)$ en $T(t)$ voldoen.
- b. Neem aan dat de oplossing de volgende vorm heeft:

$$u(x, t) = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) (C e^{\omega t} + D e^{-\omega t})$$

Met A , B , C en D constanten en $\omega > 0$.

Geef de oplossing $u(x, t)$ die aan de volgende randvoorwaarden voldoet:

- $u(0, t) = 0$ voor $t \geq 0$,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ voor $x \geq 0$,
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sin(4x)$ voor $x \geq 0$.

Normering

Vooraf	1			2			3			4	5		Totaal
	a	b	c	a	b	c	a	b	c		a	b	
	2	4	2	2	4	2	4	2	2	4	4	4	
4		8			8			8		4	8		40