



De normering van de opgaven vind je op de laatste pagina van het tentamen.
Er is een formuleblad toegevoegd. Je hebt twee uur de tijd.

Opgave 1

- a. Los op

$$z^2 - (4 - 6i)z + (-5 - 10i) = 0.$$

- b. Schets in het complexe vlak alle getallen z die voldoen aan

$$|z - i| = \operatorname{Im}(z + i).$$

Opgave 2

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, en de vector $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

- a. Bepaal de inverse van A .

- b. Bepaal de determinant van A .

- c. Los op $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$.

Opgave 3

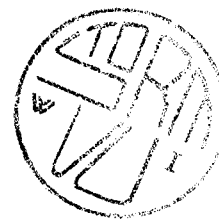
Voor elk reëel getal p definiëren we een matrix $A(p)$ door

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Voor welke twee waarden van p is $A(p)$ niet inverteerbaar?

- b. We bekijken nu voor die twee waarden van p het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + 2y + pz &= b \\ x + (p+3)y + z &= c \end{aligned}$$



Onder welke voorwaarde op a, b en c is er een oplossing? (Nota bene: je vindt voor elk van die twee waarden van p een andere voorwaarde. Je wordt gevraagd om in beide gevallen die voorwaarde te geven.)

Opgave 4

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 \\ -14 & 9 & 6 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Aanwijzing: tel alle kolommen van $A - \lambda I$ eens bij elkaar.)

Opgave 5

a. Bereken $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$

b. Hangt de waarde van de determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ af van a, b, c, d ?

c. Gegeven is $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}.$ Bereken

$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$ Wat volgt hieruit voor de determinant van A ?

Normering

1a:3	2a:3	3a:4	4:7	5a:3
b:3	b:2	b:4		b:2
	c:2			c:3

Cijfer deeltentamen $1 = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$



Formuleblad

Goniometrische formules

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 & \cos(-x) &= \cos x \\ \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1 & \sin(-x) &= -\sin x \\ \sin(2x) &= 2\sin x \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \cos 0 &= 1 & \sin 0 &= 0 \\ \cos \frac{1}{6}\pi &= \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sin \frac{1}{6}\pi &= \frac{1}{2} \\ \cos \frac{1}{4}\pi &= \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sin \frac{1}{4}\pi &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Complexe getallen

$$\begin{aligned}z &= x + iy & x &= \operatorname{Re} z = r \cos \phi & y &= \operatorname{Im} z = r \sin \phi \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \phi &= \arg z & z &= r(\cos \phi + i \sin \phi)\end{aligned}$$

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$\begin{aligned}|z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| & \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2\end{aligned}$$

De Moivre's stelling: $(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi)$

Binomium van Newton:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad \text{Driehoek van Pascal}$$

		1		1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
1	4	6	4	1		

Matrices en determinanten

Inverse: $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$.

A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{0}$ heeft alleen $\underline{x} = \underline{0}$ als oplossing.

Eigenwaarden en eigenvectoren: $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Karakteristieke vergelijking: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Regel van Cramer: $\det A = D$. Oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$x_j \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$