

**Tentamen Wiskunde II voor Scheikundige, 6-5-1998**



Zij die de afgelopen twee jaar college hebben gelopen in dit vak maken de opgaven 1 a, b, 2, 3, 4, 5. Zij die daarvoor college hebben gelopen in dit vak maken de opgaven 1, 2, 3, 4 a, b, 6.

1. Gegeven is de functie  $f(x, y) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + y^2 - 4)$ .
  - a. Schets het tekenverloop van  $f$ . Wat kun je nu zeggen over de punten  $(2, 0)$  en  $(1, \pm\sqrt{3})$ ?
  - b. Laat zien dat de punten  $(\frac{1 \pm \sqrt{97}}{8}, 0)$  de enige punten zijn waar  $f$  een extreem aanneemt.
  - c. Bepaal de extremen van  $f$  op de cirkel  $x^2 + y^2 = 1$ .
2. Laat  $G_1$  het begrensde gebied zijn in het platte veld dat wordt ingesloten tussen de parabool  $y = x^2 + 1$  en de lijnen  $y = 2x$  en  $y = -2x$ .
  - a. Schets  $G_1$  en bereken de oppervlakte van  $G_1$ .

Laat  $G_2$  het gebied zijn dat ingesloten wordt tussen bovenstaande parabool en de cirkel  $x^2 + y^2 = 5$ .

  - b. Waarom is de oppervlakte van  $G_1 \cup G_2$  gelijk aan  $2\sqrt{5} \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ ?
  - c. Bereken de oppervlakte van  $G_2$ .
3. Bepaal van de volgende machtreeksen de convergentiestraal en het gedrag in de randpunten.
 

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^3}$ , (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$ , (iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ .
4. Gegeven is de differentiaalvergelijking  $(x^2 - 4)y'' + 8xy' + 12y = 0$ 
  - a. Leid een recurrente betrekking af voor de getallen  $y^{(n)}(0)$ .
  - b. Als gegeven is dat  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , bepaal dan de MacLaurin benadering van  $y$  to en met de term die  $x^7$  bevat.
  - c. Voor welke waarden van  $x$  convergeert de MacLaurin reeks van  $y$  zeker?
5. Gegeven is de functie  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & \text{voor } 0 < x < \pi \end{cases}$ 
  - a. Voor welke waarde van  $x$  met  $-\pi \leq x \leq \pi$  geldt dat  $f(x)$  niet gelijk is aan de som van de Fourierreeks van  $f$ ? Wat is in dat punt de som van de Fourierreeks?
  - b. Laat zien dat voor  $0 < x \leq \pi$  geldt

$$\begin{aligned} \pi - x = & \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{\pi} \cos x + \frac{2}{\pi \cdot 3^2} \cos 3x + \frac{2}{\pi \cdot 5^2} \cos 5x + \dots \\ & + \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \end{aligned}$$

- c. Wat is de som van de reeks voor  $x = 0$ ? Gebruik dat om te laten zien dat  $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ . Laat ook zien dat hetzelfde resultaat kan worden verkregen door de som van de reeks te bekijken in  $x = \pi$ .

d. Wat is de som van de reeks voor  $x = \frac{1}{2}\pi$ ? Laat zien dat daarmee volgt dat

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

6. Gegeven is dat de functie  $f(x, y)$  voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

We voeren nu nieuwe coördinaten in via  $x = e^u \cos v$  en  $y = e^u \sin v$ , en voeren ook in de functie  $g(u, v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$ . Laat zien dat  $g$  voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

### Normering

|   |          |   |   |          |   |   |            |   |   |          |   |   |          |   |   |   |
|---|----------|---|---|----------|---|---|------------|---|---|----------|---|---|----------|---|---|---|
| 1 | <i>a</i> | 1 | 2 | <i>a</i> | 2 | 3 | <i>i</i>   | 3 | 4 | <i>a</i> | 3 | 5 | <i>a</i> | 2 | 6 | 9 |
|   | <i>b</i> | 3 |   | <i>b</i> | 3 |   | <i>ii</i>  | 2 |   | <i>b</i> | 2 |   | <i>b</i> | 4 |   |   |
|   | <i>c</i> | 3 |   | <i>c</i> | 2 |   | <i>iii</i> | 3 |   | <i>c</i> | 3 |   | <i>c</i> | 2 |   |   |
|   |          |   |   |          |   |   |            |   |   |          |   |   | <i>d</i> | 1 |   |   |



Cijfer =  $\frac{1}{4}$  van het aantal punten +1.