

Opgave 1.

- (a) Geef de definities van lokale waarheid in een model, van globale waarheid in een model, en van geldigheid in een frame.
- (b) Geef voor elk van de drie noties genoemd onder (a) aan of deze gesloten is onder (i) universele generalisatie en (ii) uniforme substitutie. Leg ook uit wat dit betekent.
- (c) Bewijs of weerleg de universele geldigheid van de modale formule $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$.
- (d) Bewijs of weerleg de universele geldigheid van de modale formule $\Diamond p \wedge \Box q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$.
- (e) Gebruik uw antwoorden op (b) en (c) om aan te tonen dat $\Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$ wel of niet universeel geldig is.

Opgave 2. We beschouwen de uitbreiding van de modale basistaal met de zogenaamde *difference operator* D . De semantiek van deze operator wordt gegeven door:

$$\mathcal{M}, s \Vdash D\varphi \iff \text{er is een } t \neq s \text{ zo dat } \mathcal{M}, t \Vdash \varphi.$$

Zij verder $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ de frames gedefinieerd door onderstaande plaatjes:



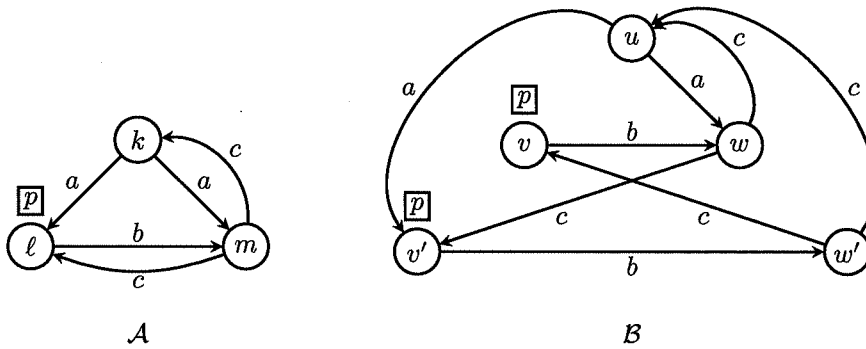
- (a) Is de formule $\Diamond p \rightarrow Dp$ geldig in $\mathcal{F}$? Verklaar uw antwoord.
- (b) Is de formule $\Diamond p \rightarrow Dp$ geldig in $\mathcal{G}$? Verklaar uw antwoord.
- (c) Bewijs dat de formule $\Diamond p \rightarrow Dp$ de klasse van irreflexieve frames karakteriseert.
(Een frame $\mathcal{F} = (W, R)$ is *irreflexief* als $\forall x. \neg Rxx$.)
- (d) Bewijs dat de formule Dp niet equivalent kan zijn met een formule in de modale basistaal.

zie ommezijde

Opgave 3. Het Hilbert systeem T is de uitbreiding van het basissysteem K met het waarheids-axioma $A1$. Systeem $S4$ is de uitbreiding van T met het axioma van positieve introspectie $A2$.

- (a) Formuleer de volledigheidstelling voor het systeem $S4$.
- (b) Laat zien dat $A3$, het axioma van negatieve introspectie, niet afleidbaar is in $S4$.
- (c) Bewijs dat een reflexieve en euclidische relatie een equivalentierelatie is.
- (d) Geef een afleiding of construeer een tegenmodel:
 - (i) $\vdash_{K^2} K_1 K_2 p \rightarrow K_2 K_1 p$
 - (ii) $\vdash_T (K(p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

Opgave 4. Beschouw de $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ gedefinieerd door onderstaande plaatjes:



- (a) Definieer een relatie $E \subseteq \{k, \ell, m\} \times \{u, v, w, v', w'\}$ zodat $E : \mathcal{A}, k \rightleftharpoons \mathcal{B}, u$. Doe alleen verslag van dat E voldoet aan de terugwaartse conditie (*zag*) van bisimulaties.
- (b) Is er een formule die waar is in toestand k maar niet in u ? Zo ja, geef zo'n formule. Zo nee, leg uit waarom niet.
- (c) Zij $\hat{\mathcal{A}}$ de PDL-uitbreiding van model $\mathcal{A}$. Bereken de toegankelijkheidsrelatie $\hat{R}_\alpha$ behorend bij het PDL-programma α :

$$\alpha = \text{if } p \text{ then } (bc)^* \text{ else } (a \cup c)^*$$

- (d) Ga voor ieder van de PDL-formules $\langle \alpha \rangle p$ en $[\alpha]p$ na of deze waar is in $\hat{\mathcal{A}}$.