

Opgave 1.

- (a) Wanneer is een modale formule φ waar in een model $\mathcal{M}$? Geldt voor alle modellen $\mathcal{M}$ en formules φ dat: ofwel $\mathcal{M} \models \varphi$ ofwel $\mathcal{M} \not\models \varphi$? Motiveer uw antwoord.
- (b) Wanneer is een modale formule φ geldig in een frame $\mathcal{F}$? Geldt voor alle frames $\mathcal{F}$ en formules φ dat: ofwel $\mathcal{F} \models \varphi$ ofwel $\mathcal{F} \not\models \varphi$? Motiveer uw antwoord.
- (c) Bewijs of weerleg de universele geldigheid van de volgende modale formules:
 - (i) $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$
 - (ii) $\Diamond \top \vee \Box \perp$
- (d) Beschouw de ‘next-time’ operator $\otimes$ met de volgende semantiek:

$$\mathcal{M}, t \models \otimes \varphi \iff \text{er is een onmiddellijke opvolger } u \text{ van } t \text{ zodat } \mathcal{M}, u \models \varphi.$$

Hierbij is $\mathcal{M} = \langle W, <, \pi \rangle$ en u is een onmiddellijke opvolger van t als $t < u$ en er geen $v \in W$ bestaat met $t < v < u$. Laat zien dat de next-time operator niet kan worden gedefinieerd in de gewone modale taal.

Opgave 2.

- (a) Wat betekent het dat een frame-eigenschap modaal karakteriseerbaar is? Geef een formele definitie.
- (b) Noem een frame (W, R) *sterk confluent* als $\forall xyz \in W. (Rxy \wedge Rxz \rightarrow \exists u \in W. (Ryu \wedge Rzu))$. Bewijs dat de formule $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ de klasse van sterk conflente frames karakteriseert.
- (c) Beschouw de frames $\mathcal{F} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$ en $\mathcal{G} = \langle \{a\}, R \rangle$ waarbij S en R gedefinieerd zijn door:

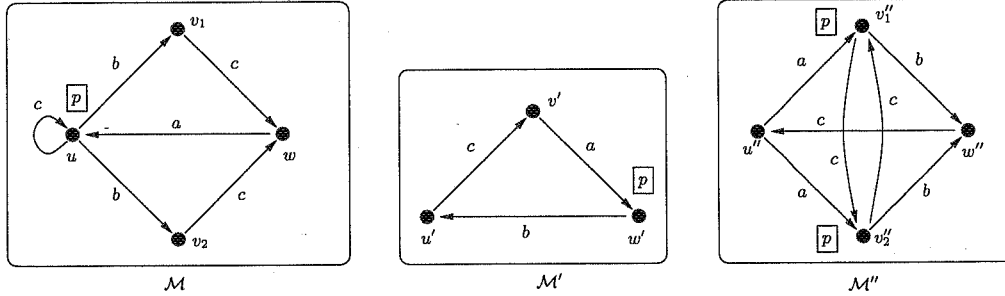
$$S = \{ \langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}, \quad R = \{ \langle a, a \rangle \}.$$

Zij verder $\pi_{\mathcal{F}}$ en $\pi_{\mathcal{G}}$ valuaties op $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ respectievelijk, zodat $\pi_{\mathcal{F}}(n)(p) = \pi_{\mathcal{G}}(a)(p)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $p \in \text{VAR}$. Laat zien dat de relatie $B \subseteq \mathbb{N} \times \{a\}$ gegeven door $B = \{ \langle n, a \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$ een bisimulatie is tussen de modellen $\langle \mathcal{F}, \pi_{\mathcal{F}} \rangle$ en $\langle \mathcal{G}, \pi_{\mathcal{G}} \rangle$.

- (d) Concludeer uit onderdeel (c) dat irreflexiviteit niet modaal karakteriseerbaar is.

zie ommezijde

Opgave 3. Beschouw de volgende $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}''$:



- Licht in één zin toe waarom $\mathcal{M}', w' \not\sqsubseteq \mathcal{M}'', v_1''$, en leg vervolgens uit waarom dat dit impliceert dat $\mathcal{M}', v' \not\sqsubseteq \mathcal{M}'', u''$ en daarmee $\mathcal{M}', u' \not\sqsubseteq \mathcal{M}'', w''$.
- Geef een onderscheidende formule voor de toestanden u' van $\mathcal{M}'$ en w'' van $\mathcal{M}''$, dat wil zeggen een formule die aantoonst dat $\mathcal{M}', u' \not\equiv \mathcal{M}'', w''$. Waarom impliceert het bestaan van een onderscheidende formule voor twee toestanden dat zij niet bisimilaair zijn?
- Laat zien dat $\mathcal{M}, w \sqsubseteq \mathcal{M}'', u''$ (het is niet nodig om verslag te doen van het verifiëren dat de gegeven relatie inderdaad een bisimulatie is).
 - Bestaat er een onderscheidende formule voor de toestanden w van $\mathcal{M}$ en u'' van $\mathcal{M}''$? Zo ja, geef zo'n formule. Zo nee, leg uit waarom.
- Zij $\widehat{\mathcal{M}}$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}$. Bereken de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha, \widehat{R}_\beta, \widehat{R}_\gamma$ van $\widehat{\mathcal{M}}$ die horen bij de PDL-programma's:

$$\alpha = bca,$$

$$\beta = \alpha \cup c,$$

$$\gamma = \beta^*.$$

- Geldt dat $\widehat{\mathcal{M}} \models [\gamma]p \leftrightarrow p$? Motiveer uw antwoord.

Opgave 4.

- Formuleer de volledighedsstelling voor het systeem $S4^n$.
- Bewijs $\vdash_{\top} p \rightarrow \neg K \neg p$ door het geven van een afleiding.
- Bewijs $\not\vdash_{S4} \neg K \neg K p \rightarrow p$ door het geven van een tegenmodel.
- Wat is het verschil tussen algemene en gemeenschappelijke kennis? Geef de waarheidsdefinitie van de epistemische operatoren E (*everybody knows*) en C (*common knowledge*). Definieer daartoe de bijhorende bereikbaarheidsrelaties.