

Opgave 1. Beschouw de uitbreiding van de modale basistaal met een nieuwe modale operator '!', waarvan de semantiek is gegeven door:

$$\mathcal{M}, s \Vdash !\varphi \iff \mathcal{M}, s \Vdash \varphi \text{ en er is geen } t \neq s \text{ zodat } \mathcal{M}, t \Vdash \varphi.$$

Beschouw verder de frames $\mathcal{F} = \langle \{e, o\}, R \rangle$ met $R = \{\langle e, o \rangle, \langle o, e \rangle\}$, en $\mathcal{G} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$ met $S = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$, en laat $\psi = (!p) \rightarrow \Box(\Diamond p \rightarrow p)$.

- (a) Bewijs of weerleg de geldigheid van ψ in $\mathcal{F}$.
- (b) Bewijs of weerleg de geldigheid van ψ in $\mathcal{G}$.
- (c) Bewijs dat de formule $!p$ niet definieerbaar is in de modale basistaal.
(Hint: associeer met een valuatie op $\mathcal{F}$ een valuatie op $\mathcal{G}$ en pas de invariantiestelling toe.)

Opgave 2.

- (a) Wat betekent het dat een modale formule φ een frame-eigenschap P karakteriseert?
- (b) Laat $\chi = p \rightarrow \Box_1 \Diamond_2 p$, een multimodale formule over de verzameling $\{1, 2\}$, en K de klasse van $\{1, 2\}$ -frames gedefinieerd door:

$$K = \{ \langle W, R_1, R_2 \rangle \mid \forall x, y \in W (R_1 xy \implies R_2 yx) \}.$$

Bewijs dat χ de klasse K karakteriseert.

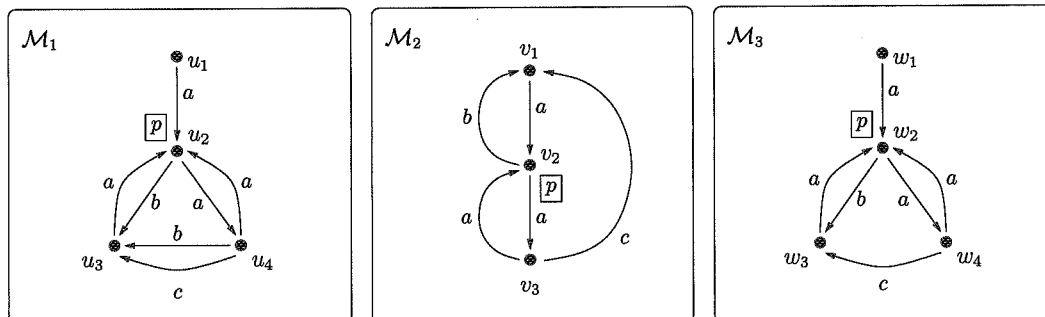
- (c) Waarom volgt uit onderdeel (c) dat ook de formule $\Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow p$ de klasse K karakteriseert?
- (d) Karakteriseert de formule $\Diamond \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ transitiviteit? Motiveer je antwoord.

Opgave 3. Het Hilbert systeem T is de uitbreiding van het basissysteem K met het waarheidsaxioma $A1$. Systeem $S4$ is de uitbreiding van T met het axioma van positieve introspectie $A2$.

- (a) Geef een afleiding van $Kp \rightarrow \neg K\neg p$ in systeem T .
- (b) Laat zien dat $A3$, het axioma van negatieve introspectie, niet afleidbaar is in $S4$.
- (c) Bewijs dat een reflexieve en euclidische relatie een equivalentierelatie is.
- (d) Laat zien dat in het Hilbert systeem dat we verkrijgen door axioma $A3$ toe te voegen aan T axioma $A2$ afleidbaar is.

zie ommezijde

Opgave 4. Beschouw de volgende $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$:



- (a) Leg uit waarom de toestanden u_1 en v_1 niet bisimuleren.
- (b) Geef een onderscheidende formule voor de toestanden u_1 en v_1 .
- (c) Geef een relatie $E \subseteq \{v_1, v_2, v_3\} \times \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zodat $E : \mathcal{M}_2, v_1 \xleftrightarrow{\sim} \mathcal{M}_3, w_1$. Doe alleen verslag van het verifiëren van dat E aan de *zig*-conditie voldoet. Bestaat er een onderscheidende formule voor v_1 en w_1 ?
- (d) Zij $\widehat{\mathcal{M}}_2$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}_2$. Geef de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha, \widehat{R}_\beta, \widehat{R}_\gamma, \widehat{R}_\delta$ van $\widehat{\mathcal{M}}_2$ behorend bij de PDL-programma's:

$$\alpha = b \cup c \qquad \beta = a^* \alpha \qquad \gamma = \beta a \qquad \delta = \gamma^*$$

- (e) Ga voor ieder van de PDL-formules $\langle \delta \rangle p$ en $[\delta] p$ na of deze waar is in $\widehat{\mathcal{M}}_2$.