

Opgave 1.

- (a) Wanneer is een modale formule φ waar in een model $\mathcal{M}$? Geldt voor alle modellen $\mathcal{M}$ en formules φ dat: ofwel $\mathcal{M} \models \varphi$ ofwel $\mathcal{M} \not\models \varphi$? Motiveer uw antwoord.
- (b) Wanneer is een modale formule φ geldig in een frame $\mathcal{F}$? Geldt voor alle frames $\mathcal{F}$ en formules φ dat: ofwel $\mathcal{F} \models \varphi$ ofwel $\mathcal{F} \not\models \varphi$? Motiveer uw antwoord.
- (c) Bewijs of weerleg de universele geldigheid van de volgende modale formules:
 - (i) $\Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$
 - (ii) $\Diamond \top \vee \Box \perp$
- (d) Beschouw de 'next-time' operator $\otimes$ met de volgende semantiek:

$$\mathcal{M}, t \models \otimes \varphi \iff \text{er is een onmiddellijke opvolger } u \text{ van } t \text{ zodat } \mathcal{M}, u \models \varphi.$$

Hierbij is $\mathcal{M} = \langle W, <, \pi \rangle$ en u is een onmiddellijke opvolger van t als $t < u$ en er geen $v \in W$ bestaat met $t < v < u$. Laat zien dat de next-time operator niet kan worden gedefinieerd in de gewone modale taal.

Opgave 2.

- (a) Wat betekent het dat een frame-eigenschap modaal karakteriseerbaar is? Geef een formele definitie.
- (b) Laat zien dat $\Diamond \top$ de klasse van voortzettende frames karakteriseert.
- (c) Beschouw de frames $\mathcal{F} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$ en $\mathcal{G} = \langle \{a\}, R \rangle$ waarbij S en R gedefinieerd zijn door:

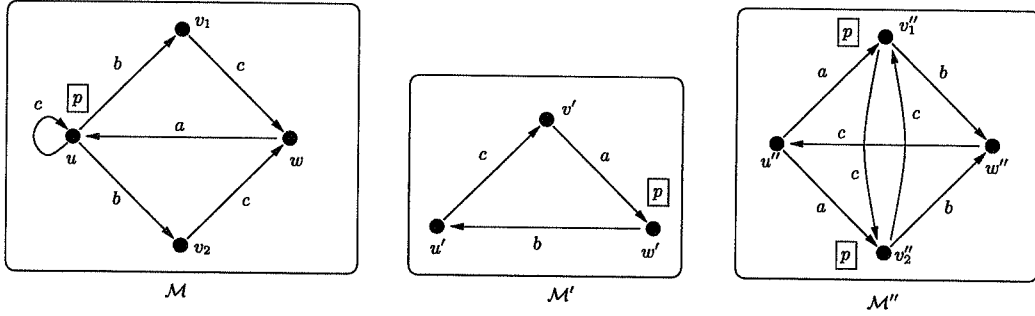
$$S = \{ \langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}, \quad R = \{ \langle a, a \rangle \}.$$

Laat zien dat de relatie $B \subseteq \mathbb{N} \times \{a\}$ gedefinieerd door $B = \{ \langle n, a \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$ een functionele surjectieve bisimulatie is van $\mathcal{F}$ naar $\mathcal{G}$.

- (d) Formuleer de tweede invariantiestelling en concludeer uit onderdeel (c) dat irreflexiviteit niet modaal karakteriseerbaar is.

zie ommezijde

Opgave 3. Beschouw de volgende $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}''$:



- Licht in één zin toe waarom $\mathcal{M}', w' \not\sim \mathcal{M}'', v_1''$, en leg vervolgens uit waarom dat dit impliceert dat $\mathcal{M}', v' \not\sim \mathcal{M}'', u''$ en daarmee $\mathcal{M}', u' \not\sim \mathcal{M}'', w''$.
- Geef een onderscheidende formule voor de toestanden u' van $\mathcal{M}'$ en w'' van $\mathcal{M}''$, dat wil zeggen een formule die aantoont dat $\mathcal{M}', u' \not\equiv \mathcal{M}'', w''$. Waarom impliceert het bestaan van een onderscheidende formule voor twee toestanden dat zij niet bisimilaair zijn?
- Laat zien dat $\mathcal{M}, w \leftrightarrow \mathcal{M}'', u''$ (het is niet nodig om verslag te doen van het verifiëren dat de gegeven relatie inderdaad een bisimulatie is). Bestaat er een onderscheidende formule voor de toestanden w van $\mathcal{M}$ en u'' van $\mathcal{M}''$? Zo ja, geef zo'n formule. Zo nee, leg uit waarom.
- Zij $\widehat{\mathcal{M}}$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}$. Bereken de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha, \widehat{R}_\beta, \widehat{R}_\gamma$ van $\widehat{\mathcal{M}}$ die horen bij de PDL-programma's:

$$\alpha = bca, \quad \beta = \alpha \cup c, \quad \gamma = \beta^*.$$

- Geldt dat $\widehat{\mathcal{M}} \models [\gamma]p \leftrightarrow p$? Motiveer uw antwoord.

Opgave 4.

- Formuleer de volledigheidstelling voor het systeem $S4^n$.
- Bewijs de volgende beweringen door het geven van afleidingen dan wel tegenmodellen:
 - $\not\vdash_K p \rightarrow \neg K \neg p$
 - $\vdash_T p \rightarrow \neg K \neg p$
 - $\not\vdash_{S4} \neg K \neg K p \rightarrow p$
 - $\vdash_{S5} \neg K \neg K p \rightarrow p$
- Wat is het verschil tussen algemene en gemeenschappelijke kennis? Geef de waarheidsdefinitie van de epistemische operatoren E (*everybody knows*) en C (*common knowledge*). Definieer daartoe de bijhorende bereikbaarheidsrelaties.