

Uitwerkingen Tentamen Voortgezette Logica 29 maart 2007

Dimitri Hendriks, 28 maart 2007

Opgave 1.

- (a) Geef de definities van waarheid van een formule in een wereld van een model, van waarheid van een formule in een model, en van universele geldigheid.

Waarheid van een formule ϕ in een toestand $s \in W$ van een model $\mathcal{M} = (W, R, \pi)$, notatie $\mathcal{M}, s \Vdash \phi$, is inductief gedefinieerd door:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, s \Vdash p &\iff \pi(s)(p) = 1 \\ \mathcal{M}, s \Vdash \neg\phi &\iff \mathcal{M}, s \not\Vdash \phi \\ \mathcal{M}, s \Vdash \phi \wedge \psi &\iff \mathcal{M}, s \Vdash \phi \ \& \ \mathcal{M}, s \Vdash \psi \\ \mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\phi &\iff \exists t \in W. (Rst \ \& \ \mathcal{M}, t \Vdash \phi)\end{aligned}$$

Een formule ϕ is *waar in een model* $\mathcal{M} = (W, R, \pi)$, notatie $\mathcal{M} \Vdash \phi$ als ϕ waar is in alle toestanden $s \in W$ van $\mathcal{M}$, dus: $\mathcal{M} \Vdash \phi \iff \forall s \in W. (\mathcal{M}, s \Vdash \phi)$.

Een formule ϕ is *universeel geldig*, notatie $\models \phi$, als geldt dat ϕ geldig is in alle frames. Een formule ϕ is geldig in een frame $\mathcal{F}$, notatie $\mathcal{F} \models \phi$, als ϕ waar is in alle op $\mathcal{F}$ gebaseerde modellen $(\mathcal{F}, \pi)$, dus: $\mathcal{F} \models \phi \iff \forall \pi. ((\mathcal{F}, \pi) \Vdash \phi)$.

- (b) Bewijs of weerleg de universele geldigheid van $\Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$.

We weerleggen de universele geldigheid van $\phi \equiv \Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$ door een model $\mathcal{M}$ te construeren zodat ϕ onwaar is in een toestand s van dat model. Beschouw $\mathcal{M} = (W, R, \pi)$ met $W = \{s, t, u\}$, $R = \{\langle s, t \rangle, \langle s, u \rangle\}$, $\pi(t)(p) = \pi(u)(q) = 1$ en $\pi(t)(q) = \pi(u)(p) = 0$. Dan geldt $\mathcal{M}, s \Vdash \Box(p \vee q)$, omdat $p \vee q$ waar is in alle R -opvolgers van s . Er geldt echter noch $\mathcal{M}, s \Vdash \Box p$ noch $\mathcal{M}, s \Vdash \Box q$, immers er is een R -opvolger van s waar p niet waar is, namelijk u en er is een R -opvolger van s waar q niet waar is, namelijk t . Dus $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box p \vee \Box q$. Daarmee hebben we een model $\mathcal{M}$ en een toestand s gevonden zodat $\mathcal{M}, s \not\Vdash \phi$. Conclusie: $\not\models \phi$.

- (c) Wat betekent modale karakteriseerbaarheid van een eigenschap van frames?

Zij P een eigenschap van frames, en K de klasse van alle frames met eigenschap P . Dan noemen we P *modaal karakteriseerbaar* als er een formule ϕ is die de klasse K karakteriseert, d.w.z. als voor alle frames $\mathcal{F}$ geldt dat $\mathcal{F} \models \phi \iff \mathcal{F} \in K$.

- (d) Noem een frame (W, R) sterk confluent als $\forall xyz \in W. (Rxy \wedge Rxz \rightarrow \exists u \in W. (Ryu \wedge Rzu))$. Bewijs dat de formule $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$ de klasse van sterk confluyente frames karakteriseert.

We gebruiken SC om de klasse van sterk confluyente frames aan te geven. Verder korten we af $\phi \equiv \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$. We bewijzen, voor alle frames $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \models \phi \iff \mathcal{F} \in \text{SC}$, in twee gedeelten.

We laten eerst zien dat ϕ geldig is in alle sterk confluyente frames. Beschouw daartoe een frame $\mathcal{F} = (W, R) \in \text{SC}$, een willekeurige valuatie π op $\mathcal{F}$, een willekeurige toestand $s \in W$, en veronderstel dat $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Diamond\Box p$, d.w.z. $(\mathcal{F}, \pi), t \Vdash \Box p$ voor zekere $t \in W$ met Rst . Om te bewijzen dat $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Box\Diamond p$ beschouwen we een willekeurige R -opvolger u van s en laten we zien dat $(\mathcal{F}, \pi), u \Vdash \Diamond p$. Omdat $\mathcal{F}$ sterk confluent is, weten we dat t en u een

gezamenlijke R -opvolger hebben, zeg v ; preciezer: met sterke confluentie van R volgt uit Rst en Rsu het bestaan van een toestand v zodanig dat Rtv en Ruv . Aangezien $(\mathcal{F}, \pi), t \Vdash \Box p$ en Rtv moet gelden dat $(\mathcal{F}, \pi), v \Vdash p$. Maar dan geldt ook $(\mathcal{F}, \pi), u \Vdash \Diamond p$. In voorgaande redenering was toestand u een willekeurige R -opvolger van s ; daarom geldt $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Box \Diamond p$. Dus hebben we aangetoond, voor een willekeurig frame $\mathcal{F} \in \text{SC}$, een willekeurige valuatie π op $\mathcal{F}$, en een willekeurige toestand s van $\mathcal{F}$ dat $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Box \Diamond p$ volgt uit de veronderstelling $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Diamond \Box p$; ergo als $\mathcal{F} \in \text{SC}$ dan $\mathcal{F} \models \phi$.

Omgekeerd, moeten we laten zien dat, voor een willekeurig frame $\mathcal{F}$, als $\mathcal{F} \models \phi$, dan $\mathcal{F} \in \text{SC}$. Dit bewijzen we met contrapositie, d.w.z. als $\mathcal{F} \notin \text{SC}$, dan $\mathcal{F} \not\models \phi$. Dus beschouw een frame $\mathcal{F} = (W, R) \notin \text{SC}$, dan zijn er punten $s, t, u \in W$ met Rst en Rsu waarvoor geen $v \in W$ bestaat zodanig dat Rtv en Ruv . Om aan te tonen dat in een dergelijk frame ϕ niet geldig is, kiezen we een valuatie π op $\mathcal{F}$ zodat $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Diamond \Box p$ en $(\mathcal{F}, \pi), t \not\Vdash \Diamond p$, als volgt. Definieer π zó dat p alleen waar is in opvolgers van u , dus:

$$\pi(x)(p) = \begin{cases} 1 & \text{als } Rux \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

Dan geldt, per definitie van π , $(\mathcal{F}, \pi), u \Vdash \Box p$, en dus $(\mathcal{F}, \pi), s \Vdash \Diamond \Box p$. Verder, omdat t en u geen gezamenlijke R -opvolgers hebben (aanname) en p alleen waar is in opvolgers van u , hebben we dat $(\mathcal{F}, \pi), t \not\Vdash \Diamond p$, en daarmee dus $(\mathcal{F}, \pi), s \not\Vdash \Box \Diamond p$. We hebben op een willekeurig frame dat niet sterk confluent is een model gemaakt waarin ϕ niet waar is. Daarmee is bewezen dat alle frames waarin ϕ geldig is, sterk confluent zijn: $\mathcal{F} \models \phi \Rightarrow \mathcal{F} \in \text{SC}$.

Opgave 2.

- (a) *Bewijs dat de bereikbaarheidsrelatie van een temporeel frame asymmetrisch is.*

Een temporeel frame is een relationele structuur (T, R) waarbij T een verzameling (van tijdstippen) en R een irreflexieve en transitieve binaire relatie op T . Een relatie $R \subseteq T \times T$ is irreflexief als $\forall x \in T. \neg Rxx$, en transitief als $\forall xyz \in T. ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$. Zij (T, R) een temporeel frame. Om te bewijzen dat R asymmetrisch is, d.w.z. $\forall xy \in T. (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$, beschouwen we willekeurige toestanden s en t met Rst en laten zien dat dan Rts niet het geval kan zijn. Stel immers dat Rts wel het geval is, dan volgt met transitiviteit uit Rst en Rts dat Rss , hetgeen in tegenspraak is met irreflexiviteit van R . Dus $\neg Rts$.

- (b) *Geef een voorbeeld van een temporeel frame dat noch discreet noch dicht is.*

Een temporele ordening $<$ is *dicht* als tussen ieder tweetal punten een ander punt ligt: $\forall xy. (x < y \rightarrow \exists z. (x < z < y))$, en *discreet* als voor ieder tweetal punten het eerste een eerste opvolger heeft: $\forall xy. (x < y \rightarrow \exists z \in \text{Succ}(x))$, waarbij $\text{Succ}(x)$ de verzameling van eerste opvolgers van x gedefinieerd door $\text{Succ}(x) = \{z \mid x < z \wedge \neg \exists u. (x < u < z)\}$.

Het idee is nu om een ordening te bedenken die op een gedeelte van het domein dicht maar niet discreet is, en op een ander gedeelte discreet maar niet dicht. Een voorbeeld is de verzameling A :

$$A =_{\text{def}} \{0, \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$$

met daarop de gewone ‘kleiner dan’-relatie op de rationale getallen. Het temporele frame $(A, <)$ is niet discreet want 0 heeft bijvoorbeeld wel een opvolger (bijv. 1) maar geen *eerste* opvolger. Frame $(A, <)$ is ook niet dicht, want er liggen bijvoorbeeld geen punten tussen $\frac{1}{2}$ en 1.

- (c) Laat de modale operator $\Diamond_E$ (‘ever’ of ‘ooit’) gedefinieerd zijn door:

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond_E \phi \iff \mathcal{M}, t \Vdash \phi \text{ voor zekere } t \text{ zodanig dat } s < t \text{ of } s = t \text{ of } t < s.$$

Toon aan dat de operator $\Diamond_E$ niet definieerbaar is in de modale basistaal.

Het idee is dat formules in de modale basistaal alleen in de toekomst kunnen kijken, dus blind zijn voor veranderingen in het verleden. Dit kunnen we formaliseren m.b.v. de invariantiestelling die zegt: als $\mathcal{M}, t \rightleftharpoons \mathcal{M}', t'$, dan geldt voor alle formules ϕ : $\mathcal{M}, t \Vdash \phi \iff \mathcal{M}', t' \Vdash \phi$. De taak is dus om twee bisimulaire modellen te vinden zodanig dat $\Diamond_E p$ in het ene model waar is, maar in het andere niet, en dat dit alleen veroorzaakt wordt door een verandering in het verleden. Beschouw het frame $\mathcal{F} = (\{s, t\}, \{\langle s, t \rangle\})$ en de valuaties π en π' voor p gedefinieerd door $\pi(s)(p) = 1$, $\pi(t)(p) = 0$ en $\pi'(s)(p) = \pi'(t)(p) = 0$. Dan, vanuit t bezien, verschillen $(\mathcal{F}, \pi)$ en $(\mathcal{F}, \pi')$ alleen m.b.t. het verleden s . Met andere woorden de relatie $Z = \{\langle t, t \rangle\}$ is een bisimulatie, $Z : (\mathcal{F}, \pi), t \rightleftharpoons (\mathcal{F}, \pi'), t$. Stel nu $\Diamond_E p \leftrightarrow \phi$ voor zekere formule ϕ in de modale basistaal. Dan geldt $(\mathcal{F}, \pi), t \Vdash \Diamond_E p$, en dus $(\mathcal{F}, \pi), t \Vdash \phi$. Dan volgt met de invariantiestelling dat $(\mathcal{F}, \pi'), t \Vdash \phi$, en dus dat $(\mathcal{F}, \pi'), t \Vdash \Diamond_E p$, quod non.

Opgave 3.

- (a) Formuleer de volledigheidstelling voor het systeem $S4^n$.

De volledigheidstelling voor het systeem $S4^n$ luidt:

$$\vdash_{S4^n} \phi \iff \mathbf{C}_{rt}^n \models \phi$$

voor alle epistemische n -formules. Hierbij is $\mathbf{C}_{rt}^n$ de klasse van n -frames waarin elke R_i ($1 \leq i \leq n$) reflexief en transitief is. De richting ‘ $\Rightarrow$ ’ geeft correctheid aan: als een formule ϕ afleidbaar is in het systeem $S4^n$ dan is ϕ geldig in alle frames van de klasse $\mathbf{C}_{rt}^n$. De richting ‘ $\Leftarrow$ ’ drukt volledigheid uit, d.w.z. alles wat geldig is in reflexieve, transitieve frames, is afleidbaar in $S4^n$. De term ‘volledigheid’ wordt vaak gebruikt voor de conjunctie van correctheid en volledigheid, zo ook het voorkomen in ‘volledigheidstelling’.

- (b) Laat zien dat het axioma voor negatieve introspectie (A3) niet afleidbaar is in $S4^n$.

Het axioma voor negatieve introspectie luidt:

$$\neg K_i p \rightarrow K_i \neg K_i p \tag{A3}$$

We laten zien dat $\mathbf{C}_{rt}^n \not\models \text{A3}$. Dan volgt met (het correctheidsgedeelte van) de volledigheidstelling voor $S4^n$ zoals geformuleerd bij onderdeel (a) dat $\not\vdash_{S4^n} \text{A3}$.

Om een tegenmodel te contrueren, is het afdoende de epistemische taal met één kenner te beschouwen. Zij $\mathcal{M} = (W, R, \pi)$ een epistemisch model met $W = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s \rangle, \langle s, t \rangle, \langle t, t \rangle\}$, $\pi(s)(p) = 0$, en $\pi(t)(p) = 1$. Merk op dat R reflexief en transitief, maar niet symmetrisch

is. Er geldt $\mathcal{M}, s \not\models Kp$ (en dus $\mathcal{M}, s \models \neg Kp$), want s is een R -opvolger van zichzelf en $\mathcal{M}, s \not\models p$. Verder geldt $\mathcal{M}, t \models Kp$ (en dus $\mathcal{M}, t \not\models \neg Kp$), omdat t de enige R -opvolger van t is en $\mathcal{M}, t \models p$. Maar dan hebben we ook dat $\mathcal{M}, s \not\models K\neg Kp$, want Rst en $\mathcal{M}, t \not\models \neg Kp$; daarmee hebben we bewezen dat $\mathcal{M}, s \not\models \neg Kp \rightarrow K\neg Kp$. We hebben een model $\mathcal{M}$ gevonden dat is gebaseerd op een frame $(W, R) \in \mathcal{C}_{rt}^n$ en waarin de formule $\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$ onwaar is. Daarmee is geldigheid van A3 in reflexieve en transitieve frames weerlegd: $\mathcal{C}_{rt}^n \not\models A3$. Met de volledighedsstelling volgt dan dat $\not\models_{S4^n} A3$.

(c) *Laat zien dat de formule $Kp \rightarrow \neg K\neg p$ afleidbaar is in systeem T .*

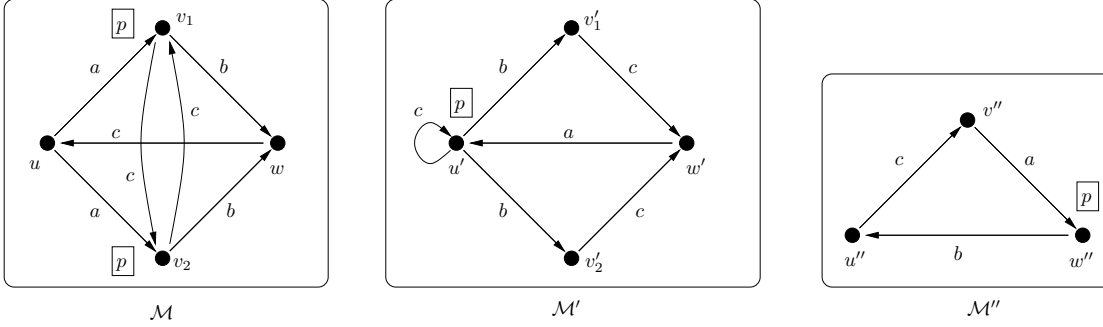
Dit kan op twee manieren. Ofwel door een afleiding in systeem T (een uitbreiding van het systeem K met het waarheidsaxioma A1: $Kp \rightarrow p$) te geven of door gebruik te maken van de volledighedsstelling voor systeem T , te weten: $\forall \phi. (\vdash_T \phi \iff \mathcal{C}_r \models \phi)$, waarbij $\mathcal{C}_r$ de klasse van frames met reflexieve bereikbaarheidsrelaties aanduidt.

We geven eerst een T -afleiding:

1. $Kp \rightarrow p$ (A1)
2. $K\neg p \rightarrow \neg p$ (SUB, 1)
3. $(q \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$ (CT)
4. $(K\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg K\neg p)$ (SUB, 3)
5. $p \rightarrow \neg K\neg p$ (MP, 4, 2)
6. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (q \rightarrow s))$ (CT)
7. $(Kp \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg K\neg p) \rightarrow (Kp \rightarrow \neg K\neg p))$ (SUB, 6)
8. $(p \rightarrow \neg K\neg p) \rightarrow (Kp \rightarrow \neg K\neg p)$ (MP, 7, 1)
9. $Kp \rightarrow \neg K\neg p$ (MP, 8, 5)

Zoals gezegd, een alternatief is te bewijzen dat $\mathcal{C}_r \models Kp \rightarrow \neg K\neg p$. Beschouw daartoe een willekeurig reflexief frame (W, R) , een willekeurige valuatie $\pi : W \rightarrow (\text{VAR} \rightarrow \{0, 1\})$, een willekeurige toestand $s \in W$ en veronderstel dat $(W, R, \pi), s \models Kp$. Dat wil zeggen dat voor alle $t \in W$ met Rst geldt $(W, R, \pi), t \models p$. Vanwege reflexiviteit weten we dat Rss , en dus moet gelden $(W, R, \pi), s \models p$. Dan geldt natuurlijk ook $(W, R, \pi), s \not\models \neg p$, en dus is er een R -opvolger van s waar $\neg p$ niet waar is, namelijk s zelf. Daaruit volgt weer dat $(W, R, \pi), s \not\models K\neg p$, oftewel $(W, R, \pi), s \models \neg K\neg p$. We hebben nu laten zien, voor een willekeurig frame $(W, R) \in \mathcal{C}_r$, met daarop een willekeurige valuatie π , en een willekeurige toestand $s \in W$, dat $(W, R, \pi), s \models \neg K\neg p$ volgt uit de veronderstelling $(W, R, \pi), s \models Kp$. Conclusie: $\mathcal{C}_r \models Kp \rightarrow \neg K\neg p$. Met (het volledigheds gedeelte van) de volledighedsstelling volgt dan dat $\vdash_T Kp \rightarrow \neg K\neg p$.

Opgave 4. Beschouw de volgende $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}''$:



- (a) Licht in één zin toe waarom $\mathcal{M}, v_1 \not\equiv \mathcal{M}'', w''$, en leg vervolgens uit waarom dat dit impliceert dat $\mathcal{M}, u \not\equiv \mathcal{M}'', v''$ en $\mathcal{M}, w \not\equiv \mathcal{M}'', u''$.

In toestand v_1 van model $\mathcal{M}$ is een c -transitie mogelijk (naar v_2), terwijl geen c -transitie mogelijk is vanuit toestand w'' van model $\mathcal{M}''$, dus bestaat er geen bisimulatie $Z \subseteq W \times W''$ (W en W'' de verzamelingen toestanden van $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}''$ resp.) zodanig dat $\langle v_1, w'' \rangle \in Z$.

Om die reden bestaat er ook geen bisimulatie die toestanden u en v'' relateert. Immers, stel dat er wel een bisimulatie Z was met $\langle u, v'' \rangle \in Z$. Dan, omdat vanuit u een a -transitie naar v_1 mogelijk is, moet die gematcht kunnen worden met een a -transitie vanuit v'' . Echter, de enige a -transitie vanuit v'' is naar toestand w'' ; dus dan zou moeten gelden dat $\langle v_1, w'' \rangle \in Z$, hetgeen in tegenspraak is met het eerder aangetoonde feit $\mathcal{M}, v_1 \not\equiv \mathcal{M}'', w''$. Conclusie: $\mathcal{M}, u \not\equiv \mathcal{M}'', v''$.

Hieruit volgt weer dat $\mathcal{M}, w \not\equiv \mathcal{M}'', u''$, immers stel dat er wel een bisimulatie Z was met $\langle w, u'' \rangle \in Z$, dan, om aan (bijv.) de *forward*-conditie te voldoen, zou het ook zo moeten zijn dat $\langle u, v'' \rangle \in Z$, waarvan we de onmogelijkheid zojuist hebben ingezien.

- (b) Geef een onderscheidende formule voor de toestanden w van $\mathcal{M}$ en u'' van $\mathcal{M}''$, dat wil zeggen een formule die aantoont dat $\mathcal{M}, w \not\equiv \mathcal{M}'', u''$.

Na de observatie bij onderdeel (a) is het eenvoudig een formule te vinden die toestand w onderscheidt van toestand u'' : neem $\phi \equiv \langle c \rangle \langle a \rangle \langle c \rangle \top$. Er geldt $\mathcal{M}, w \models \phi$, omdat $R_c w u$, $R_a u v_1$ en $R_c v_1 v_2$. Verder geldt $\mathcal{M}'', w'' \not\models \langle c \rangle \top$, omdat vanuit w'' geen c -transitie mogelijk is. Daarom ook $\mathcal{M}'', v'' \not\models \langle a \rangle \langle c \rangle \top$, omdat w'' de enige toestand is die met een a -transitie vanuit v'' te bereiken is. En daarom geldt $\mathcal{M}'', u'' \not\models \phi$, omdat v'' de enige toestand is die met een c -transitie vanuit u'' te bereiken is.

- (c) Laat zien dat $\mathcal{M}, u \equiv \mathcal{M}', w'$ (het is niet nodig om verslag te doen van het verifiëren dat de gegeven relatie inderdaad een bisimulatie is). Bestaat er een onderscheidende formule voor de toestanden u van $\mathcal{M}$ en w' van $\mathcal{M}'$? Zo ja, geef zo'n formule. Zo nee, leg uit waarom.

Ga na dat de relatie $Z \subset W \times W'$ gedefinieerd door:

$$Z = \{\langle u, w' \rangle, \langle v_1, u' \rangle, \langle v_2, u' \rangle, \langle w, v'_1 \rangle, \langle w, v'_2 \rangle\}$$

een bisimulatie is die toestanden u en w' relateert; dus $Z : \mathcal{M}, u \equiv \mathcal{M}', w'$.

Volgens de invariantiestelling (voor $\{a, b, c\}$ -modellen) zijn bisimilaire toestanden modaal equivalent, dus volgt uit $\mathcal{M}, u \Leftrightarrow \mathcal{M}', w'$ dat $\mathcal{M}, u \equiv \mathcal{M}', w'$. Met andere woorden er zijn geen onderscheidende formules tussen de bisimilaire toestanden u en w' .

- (d) Zij $\widehat{\mathcal{M}}$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}$. Bereken de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha$, $\widehat{R}_\beta$, $\widehat{R}_\gamma$ van $\widehat{\mathcal{M}}$ die horen bij de PDL-programma's $\alpha = (b ; c ; a)$, $\beta = (\alpha \cup c)$, en $\gamma = \beta^*$.

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_b &= R_b &= \{ \langle v_1, w \rangle, \langle v_2, w \rangle \} \\
\widehat{R}_c &= R_c &= \{ \langle w, u \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle \} \\
\widehat{R}_a &= R_a &= \{ \langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle \} \\
\widehat{R}_{b;c} &= \widehat{R}_b \odot \widehat{R}_c &= \{ \langle v_1, u \rangle, \langle v_2, u \rangle \} \\
\widehat{R}_\alpha &= \widehat{R}_{b;c} \odot \widehat{R}_a &= \{ \langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle \} \\
\widehat{R}_\beta &= \widehat{R}_\alpha \cup \widehat{R}_c &= \{ \langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle w, u \rangle \} \\
\widehat{R}_\gamma &= (\widehat{R}_\beta)^* &= \{ \langle u, u \rangle, \langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle w, u \rangle, \langle w, w \rangle \}
\end{aligned}$$

- (e) Geldt dat $\widehat{\mathcal{M}} \Vdash [\gamma]p \leftrightarrow p$? Motiveer uw antwoord.

Ja. We bewijzen eerst $\widehat{\mathcal{M}} \Vdash p \rightarrow [\gamma]p$. Stel $\widehat{\mathcal{M}}, x \Vdash p$, dan $x = v_1$ of $x = v_2$. Er geldt $\widehat{\mathcal{M}}, v_1 \Vdash [\gamma]p$, immers de enige $\widehat{R}_\gamma$ -opvolgers van v_1 zijn v_1 en v_2 , en daar is p waar. Het geval $x = v_2$ gaat analoog.

Dan laten we zien dat $\widehat{\mathcal{M}} \Vdash [\gamma]p \rightarrow p$. Dit volgt direct uit reflexiviteit van $\widehat{R}_\gamma$: voor alle $x \in \{u, v_1, v_2, w\}$ en alle formules ϕ (dus in het bijzonder voor p) geldt dat als $\widehat{\mathcal{M}}, x \Vdash [\gamma]\phi$, dat dan $\widehat{\mathcal{M}}, x \Vdash \phi$, vanwege $\langle x, x \rangle \in \widehat{R}_\gamma$.