

Opgave 1.

- (a) Geef de definities van waarheid in een toestand van een model, van waarheid in een model, en van geldigheid in een frame.
- (b) Geef voor elk van de drie noties genoemd onder (a) aan of deze gesloten is onder (i) universele generalisatie en (ii) uniforme substitutie. Leg ook uit wat dit betekent.
- (c) Bewijs of weerleg de universele geldigheid van de modale formule $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$.
- (d) Gebruik uw antwoorden op (b) en (c) om aan te tonen dat $\Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$ wel of niet universeel geldig is.

Opgave 2.

- (a) Kan een klasse van frames gekarakteriseerd worden door niet-equivalente formules? Met andere woorden: is er een klasse K die zowel door φ als ψ wordt gekarakteriseerd, maar φ en ψ niet equivalent? Zo ja, geef een voorbeeld. Zo nee, toon dit aan.
- (b) Laat $n \in \mathbb{N}$, en K_n de klasse van frames $\langle W, R \rangle$ waarin elk R -pad ten hoogste lengte n heeft:

$$K_n = \{ \langle W, R \rangle \mid \forall w_0, \dots, w_m \in W. (w_0 R w_1 R \dots R w_m \implies m \leq n) \}.$$

Geef een modale formule φ_n die de klasse K_n karakteriseert, en bewijs dit voor $n = 3$; d.w.z. bewijs dat φ_3 de klasse K_3 karakteriseert.

- (c) Beschouw de frames $\mathcal{F} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$ en $\mathcal{G} = \langle \{a, b\}, R \rangle$ waarbij S en R gedefinieerd door:

$$S = \{ \langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}, \quad R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}.$$

Bewijs dat de relatie $B \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b\}$ gedefinieerd door:

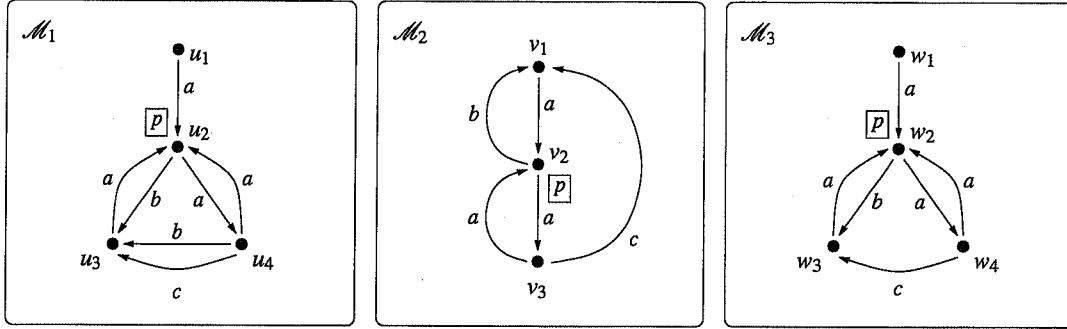
$$B = \{ \langle 2n, a \rangle, \langle 2n+1, b \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$$

een functionele surjectieve bisimulatie is van $\mathcal{F}$ naar $\mathcal{G}$, dus $B : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$.

- (d) Concludeer uit onderdeel (c) dat asymmetrie niet modaal karakteriseerbaar is.

zie ommezijde!

Opgave 3. Beschouw de volgende $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$:



- Leg uit waarom de toestanden u_1 en w_1 niet bisimuleren.
- Geef een onderscheidende formule voor de toestanden u_1 en w_1 .
- Geef een relatie $E \subseteq \{v_1, v_2, v_3\} \times \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zodat $E : \mathcal{M}_2, v_1 \leftrightarrow \mathcal{M}_3, w_1$. Doe alleen verslag van het verifiëren van dat E aan de *forward* conditie voldoet. Bestaat er een onderscheidende formule voor v_1 en w_1 ?
- Zij $\widehat{\mathcal{M}}_3$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}_3$. Geef de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha, \widehat{R}_\beta, \widehat{R}_\gamma, \widehat{R}_\delta$ van $\widehat{\mathcal{M}}_3$ behorend bij de PDL-programma's:

$$\alpha = b \cup c \qquad \beta = a^* \alpha \qquad \gamma = \beta a \qquad \delta = \gamma^*$$

- Ga voor ieder van de PDL-formules $\langle \delta \rangle p$ en $[\delta] p$ na of deze geldig is in $\widehat{\mathcal{M}}_3$.

Opgave 4.

- Welke klasse van frames wordt door het axioma van negatieve introspectie (A3) gekarakteriseerd? (Bewijs hoeft niet.)
- Laat zien dat een reflexieve en euclidische relatie ook transitief is.
- Is in het Hilbert systeem dat we verkrijgen door axioma A3 aan systeem T toe te voegen, het axioma van positieve introspectie (A2) afleidbaar? Motiveer uw antwoord.
- Geef een afleiding of construeer een tegenmodel:
 - $\vdash_{K^2} K_1 K_2 p \rightarrow K_2 K_1 p$
 - $\vdash_T (K(p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$