

Opgave 1. (a) Laat $\mathcal{K}$ een klasse van frames voor de modale basistaal zijn. Geef de definities voor: “ φ is geldig in $\mathcal{K}$ ”, “ φ is universeel geldig” (2 pt), en “ φ karakteriseert $\mathcal{K}$ ” (2 pt).

(b) Een binaire relatie $R \subseteq W \times W$ heet *partieel functioneel* dan en slechts dan als voor alle $x, y, z \in W$ zodat xRy en xRz volgt dat $y = z$. Een frame $\mathcal{F} = (W, R)$ heet *partieel functioneel* dan en slechts dan als R partieel functioneel is (d.w.z. als ieder wereld *hooguit* één opvolger-wereld heeft (maar ook werelden zonder opvolger-werelden mogelijk zijn)).

Laat zien dat de formule $\Diamond p \rightarrow \Box p$ geldig is in alle partieel functionele frames. (8 pt).

(c) Laat omgekeerd zien dat, voor alle frames $\mathcal{F} = (W, R)$ zodat $\mathcal{F} \models \Diamond p \rightarrow \Box p$ het geval is dat $\mathcal{F}$ partieel functioneel is. (Hiervoor kan het handig zijn om aan te tonen dat, als een frame $\mathcal{F}$ niet partieel functioneel is, $\mathcal{F} \not\models \Diamond p \rightarrow \Box p$ volgt.) (8 pt).

(d) Concludeer uit de in (b) en (c) bewezen feiten dat $\Diamond p \rightarrow \Box p$ de klasse van partieel functionele frames voor de modale basistaal karakteriseert. Leg vervolgens uit waarom dit impliceert dat ook de formule $\Diamond \neg p \rightarrow \Box \neg p$ de klasse van partieel functionele frames karakteriseert. (5 pt).

Opgave 2. We kijken naar het temporele $\{F, P\}$ -frame $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <, >)$, met $<$ de gewone ordening op $\mathbb{Z}$ en $>$ haar omkering. We laten π_1 en π_2 de valuaties op $\mathcal{Z}$ zijn, gedefinieerd door

$$\pi_1(x)(pvar) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \dots (x \text{ of } -x \text{ is priemgetal}) \ \& \ pvar = p \\ 0 & \dots \text{ anders} \end{cases}$$

$$\pi_2(x)(pvar) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \dots (x \text{ is een drievoud}) \ \& \ pvar = p \\ 0 & \dots \text{ anders} \end{cases}$$

(voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en $pvar \in PVAR$). [(a): (5 pts)., (b): (8 pts).]

(a) Geef een bisimulatie Z tussen de modellen $(\mathcal{Z}, \pi_1)$ en $(\mathcal{Z}, \pi_2)$ zo dat $\langle 2, 0 \rangle \in Z$ en $\langle 3, 3 \rangle \in Z$, om hierdoor $(\mathcal{Z}, \pi_1), 2 \not\equiv (\mathcal{Z}, \pi_2), 0$ en $(\mathcal{Z}, \pi_1), 3 \not\equiv (\mathcal{Z}, \pi_2), 3$ aan te tonen. (Verslag doen van het hebben nagekeken van de, hier te checken, 5 bisimulatie condities hoeft niet.)

(b) We baseren ons nu op de taal van de multimodale logica met indexverzameling $\{F, P\}$ uitgebreid met de next-time operator $\otimes$ (dus we hebben hier als mogelijke modaliteiten: $\Box_P, \Diamond_P, \Box_F, \Diamond_F, \otimes$), en we kijken alleen maar naar het model $(\mathcal{Z}, \pi_1)$.

Geef een formule φ_0 in deze taal zó dat

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) \left[(\mathcal{Z}, \pi_1), x \models \varphi_0 \iff x \text{ is priemgetal, maar } x+2 \text{ en } x+4 \text{ niet} \right], \quad (1)$$

en verder ook een formule φ in deze taal zó dat

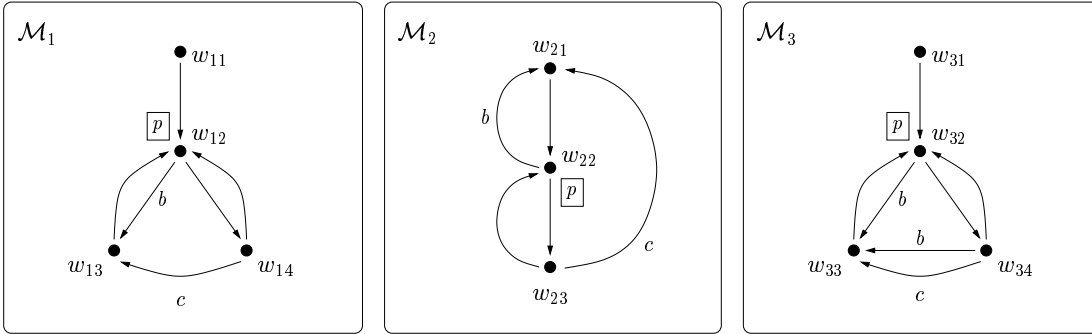
$$(\mathcal{Z}, \pi_1) \models \varphi \iff \text{er zijn oneindig veel priemgetallen } p \text{ met de eigenschap dat } p+2 \text{ en } p+4 \text{ geen priemgetallen zijn.} \quad (2)$$

Leg ook uit waarom de gevonden formules φ_0 en φ inderdaad aan (1) en aan (2) voldoen.

Opgave 3. We bekijken systemen van de kennislogica (epistemische logica) met n kenners ($n \geq 1$ een natuurlijke getal).

- Laat $i \in \{1, \dots, n\}$. Geef het distributieaxioma $(DB)_i$ en het waarheidsaxioma $(A1)_i$ voor de kenner i . In welke van de kennislogische systemen K^n , T^n , $S4^n$, en $S5^n$ komen de axioma's voor die bij de schema's (DB) en $(A1)$ behoren? (5 pts).
- Welke frame klassen worden respectievelijk gekarakteriseerd door de (verzameling van alle) axioma's in K^n , en door de (verzameling van alle) axioma's in T^n ? (5 pts).
- Formulier de (correctheids-) en volledighedsstellingen voor K^n en T^n . (5 pt).
- Laat zien, voor i met $1 \leq i \leq n$, dat $\vdash_{T^n} K_i p \rightarrow \neg K_i \neg p$ geldt (of door een afleiding te geven, of door semantisch te redeneren en de volledighedsstelling voor T^n te gebruiken). (9 pt).

Opgave 4. We bekijken de volgende drie $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ en $\mathcal{M}_3$ (ongelabelde pijltjes in deze plaatjes zijn als a -gelabelde pijltjes te begrijpen):



- Licht in één zin toe waarom $\mathcal{M}_1, w_{14} \not\equiv \mathcal{M}_3, w_{34}$, en leg vervolgens uit waarom dit impliceert dat $\mathcal{M}_1, w_{12} \not\equiv \mathcal{M}_3, w_{32}$ and $\mathcal{M}_1, w_{11} \not\equiv \mathcal{M}_3, w_{31}$. (4 pt).
- Geef een onderscheidende formule voor de toestanden w_{11} in $\mathcal{M}_1$ en w_{31} in $\mathcal{M}_3$, d.w.z. een formule die $\mathcal{M}_1, w_{11} \not\equiv \mathcal{M}_3, w_{31}$ aantoont. (4 pt).
- Laat zien dat $\mathcal{M}_1, w_{11} \not\equiv \mathcal{M}_2, w_{21}$ door een bisimulatie te geven (verslag doen van het nakijken van de eisen aan de bisimulatie hoeft niet). Waarom bestaat dan geen onderscheidende formule voor de toestanden w_{11} in $\mathcal{M}_1$ en w_{21} in $\mathcal{M}_2$? (6 pt).
- Zij $\widehat{\mathcal{M}}_1$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}_1$. Bereken de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha$, $\widehat{R}_\beta$, $\widehat{R}_\gamma$ van van $\widehat{\mathcal{M}}_1$ die horen bij de PDL-programma's $\alpha = (a^* ; (b \cup c))$, $\beta = (\alpha ; a)$, en $\gamma = \beta^*$. (10 pt).
- Ga voor een ieder van de PDL-formules $\langle \gamma \rangle p$ en $[\gamma] p$ na of deze geldig is in de PDL-uitbreiding $\widehat{\mathcal{M}}_1$ van $\mathcal{M}_1$. (4 pt).

Er zijn in totaal negentig punten te behalen. Het tentamencijfer is gelijk aan het tiende deel van het behaalde aantal punten, plus één. Als aan de eis m.b.t. ingeleverde huiswerkopgaven is voldaan, wordt dit tentamencijfer nog verhoogd met een half bonuspunt (met dien verstande dat het hoogst te behalen cijfer een tien is).

Het gecorrigeerde werk zal uiteindelijk bij het onderwijsbureau zijn in te zien.