

Opgave 1. (a) Laat $\mathcal{K}$ een willekeurige klasse van frames voor de modale basistaal zijn, en φ een formule in de modale basistaal. Geef de definitie voor: “ φ karakteriseert $\mathcal{K}$ ”. (4 pt).

(b) Laat zien dat als, voor een frame $\mathcal{F} = (W, R)$ voor de modale basistaal, $\mathcal{F} \not\models \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ het geval is, $\mathcal{F}$ niet transitief is. (8 pt).

(c) Laat omgekeerd zien dat, als een frame $\mathcal{F} = (W, R)$ niet transitief is, de formule $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ niet geldig is in $\mathcal{F}$. (8 pt).

(d) Concludeer uit de in (b) en (c) bewezen feiten dat $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ de klasse van transitieve frames voor de modale basistaal karakteriseert. Leg vervolgens uit waarom dit impliceert dat ook de formule $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ de klasse van transitieve frames karakteriseert. (5 pt).

Opgave 2. We kijken naar het temporele $\{F, P\}$ -frame $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <, >)$, met $<$ de gewone ordening op $\mathbb{Z}$ en $>$ haar omkering. We laten π_1 en π_2 de valuaties op $\mathcal{Z}$ zijn, gedefinieerd door

$$\pi_1(x)(pvar) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \dots (x \text{ of } -x \text{ is primgetal}) \ \& \ pvar = p \\ 0 & \dots \text{ anders} \end{cases}$$

$$\pi_2(x)(pvar) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \dots (x \text{ is een drievoud}) \ \& \ pvar = p \\ 0 & \dots \text{ anders} \end{cases}$$

(voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en $pvar \in PVAR$). [(a): (5 pts)., (b): (8 pts).]

(a) Geef een bisimulatie Z tussen de modellen $(\mathcal{Z}, \pi_1)$ en $(\mathcal{Z}, \pi_2)$ zo dat $\langle 2, 3 \rangle \in Z$, om hierdoor $(\mathcal{Z}, \pi_1), 2 \Leftrightarrow (\mathcal{Z}, \pi_2), 3$ aan te tonen. (Verslag doen van het nakijken van de, hier te checken, 5 bisimulatie condities hoeft niet.)

(b) Een *priemtweeling* is een paar $\langle n, n' \rangle$ van priemgetallen n en n' zó dat $n' = n + 2$. (Bijv. zijn $\langle 3, 5 \rangle$ en $\langle 29, 31 \rangle$ priemtweelingen.)

Vind een formule φ in taal van de multimodale logica met indexverzameling $\{F, P\}$ uitgebreid met de next-time operator $\otimes$ (dus mogelijke modaliteiten: $\Box_P, \Diamond_P, \Box_F, \Diamond_F, \otimes$) z'o dat:

$$(\mathcal{Z}, \pi_1) \models \varphi \iff \text{er zijn oneindig veel priemtweelingen,} \quad (1)$$

en leg ook uit waarom de gevonden formule inderdaad aan (1) voldoet.

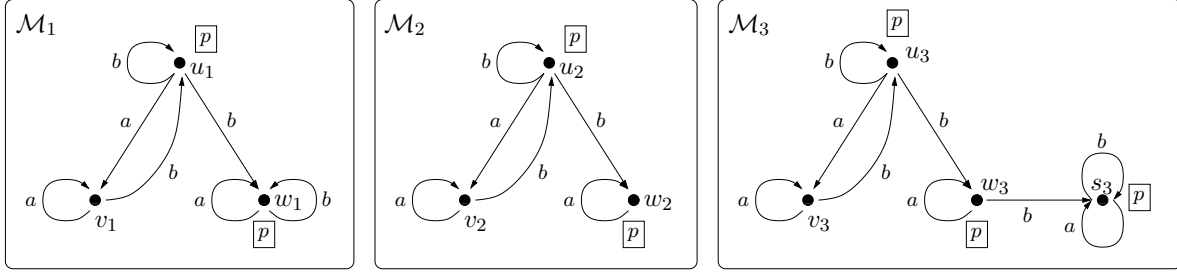
Opgave 3. We bekijken systemen van de kennislogica (epistemische logica) met n kenners ($n \geq 1$ een natuurlijk getal).

(a) Geef de axioma's (A2) en (A3) voor positieve en negatieve introspectie. (4 pts).

(b) Welke frame klassen horen bij de kennislogische systemen $S4^n$ en $S5^n$? En wat is precies ermee bedoeld dat deze frame klassen bij deze systemen “horen”? (5 pts).

- (c) Formulier de (correctheids-) en volledighedsstellingen voor $S4^n$ en $S5^n$. (5 pt).
- (d) Laat zien dat $\vdash_{S5^n} \neg p \rightarrow K\neg Kp$ geldt (of door een afleiding te geven, of door semantisch te redeneren en de volledighedsstelling voor $S5^n$ te gebruiken). (10 pt).

Opgave 4. We bekijken de volgende drie $\{a, b\}$ -modellen $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ en $\mathcal{M}_3$:



- (a) Licht in één zin toe waarom $\mathcal{M}_1, w_1 \not\cong \mathcal{M}_2, w_2$, en leg vervolgens uit waarom dit impliceert dat $\mathcal{M}_1, u_1 \not\cong \mathcal{M}_2, u_2$. (4 pt).
- (b) Geef een onderscheidende formule voor de toestanden u_1 in $\mathcal{M}_1$ en u_2 in $\mathcal{M}_2$, d.w.z. een formule die $\mathcal{M}_1, u_1 \not\equiv \mathcal{M}_2, u_2$ aantoont. (4 pt).
- (c) Laat zien dat $\mathcal{M}_1, u_1 \cong \mathcal{M}_3, u_3$ door een bisimulatie te geven (verslag doen van het nakijken van de eisen aan de bisimulatie hoeft niet). Waarom bestaat dan geen onderscheidende formule voor de toestanden u_1 in $\mathcal{M}_1$ en u_3 in $\mathcal{M}_3$? (4 pt).
- (d) Zij $\widehat{\mathcal{M}}_1$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}_1$. Bereken de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha$, $\widehat{R}_\beta$, $\widehat{R}_\gamma$ van van $\widehat{\mathcal{M}}_1$ die horen bij de PDL-programma's $\alpha = a^*.b$, $\beta = (a^*.b)^*$, en $\gamma = (a^*.b)^*.a^*$. (8 pt).
- (e) Is één van de PDL-formules $[\gamma]p$ en $\langle \gamma \rangle p$ (of zijn ze alle bij) geldig in de PDL-uitbreiding $\widehat{\mathcal{M}}_1$ van $\mathcal{M}_1$? (8 pt).

Er zijn in totaal negentig punten te behalen. Het tentamencijfer is gelijk aan het tiende deel van het behaalde aantal punten, plus één. Als aan de eis m.b.t. ingeleverde huiswerkopgaven is voldaan, wordt dit tentamencijfer nog verhoogd met een half bonuspunt (met dien verstande dat het hoogst te behalen cijfer een tien is).

Het gecorrigeerde werk zal uiteindelijk bij het onderwijsbureau zijn in te zien.