

Opgelet: er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

(a) (Algemene kennis)

(i) Geef de verzameling weer door opsomming tussen accolades $\{ \dots \}$:

$$(\{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2, 4, 8\}) \setminus \{1, 6, 8\}.$$

(ii) Van twee verzamelingen A en B is gegeven dat $\#A=7$, $\#B=4$, en $\#(A \cap B)=2$. Wat is het aantal elementen van $A \cup B$?

(iii) We gebruiken de gegevens uit het vorige onderdeel (ii). In de verzameling $A \cup B$ vormen we drie parten: $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$. Is dit een *partitie* van $A \cup B$ (antwoord met ja / nee / onvoldoende informatie)? Als je ook correcte toelichting geeft krijg je een **bonus** van 1 punt op dit onderdeel.

(b) Herinner dat $A \Delta B$ staat voor het *symmetrisch verschil* van A en B , d.w.z., de verzameling van elementen die *exclusief* tot A of tot B behoren. Dus $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Maak een *Venn-diagram* voor elk van de volgende twee formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$(A \Delta B) \cap C, \quad (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

(c) Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van *verzamelingenalgebra*. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt. Het universum is U . Je verdient een **bonus** van 1 punt op dit onderdeel als je ook correct aangeeft bij welke stappen de *vervangingsregel* wordt gebruikt. **N.B.:** na de normering vind je een tabel met wetten uit de verzamelingenalgebra.

$$(A \cap B') \cup (A \cap B).$$

2. Relaties en functies

(a) Algemene kennis.

(i) Als R en S twee binaire relaties zijn, welke eigenschap moet een paar $\langle a, b \rangle$ hebben om in de *samengestelde relatie* $R \circ S$ te zijn?

(ii) Wat bedoelt men met "een relatie R is antisymmetrisch"?

(iii) Is de relatie $R := \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 0 \rangle \}$ antisymmetrisch? Is de relatie $R \circ R$ antisymmetrisch? Antwoord telkens met ja / nee.

(iv) Waaraan herken je dat een relatie een *functie* is?

Voor de rest van deze opgave bekijken we twee relaties, *VolgendeKlinker* en *VolgendeMedeklinker*, in de verzameling $\text{Alfabet} := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$. De *relatievoorschriften* zijn als volgt (x en y zonder quotes zijn namen van variabelen).

x *VolgendeKlinker* y betekent: y is de eerste klinker uit het alfabet die na x komt.

x *VolgendeMedeklinker* y betekent: y is de eerste medeklinker uit het alfabet die na x komt.

Bijvoorbeeld:

'a' *VolgendeKlinker* 'e' en 'p' *VolgendeKlinker* 'u' ;

'a' *VolgendeMedeklinker* 'b' en 't' *VolgendeMedeklinker* 'v' .

'z' *VolgendeMedeklinker* ? kan niet worden ingevuld op het vraagteken.

- (b) Antwoord met ja of nee: Is de relatie *VolgendeKlinker* antisymmetrisch? Is de relatie *VolgendeMedeklinker* antisymmetrisch?
- (c) Geef twee verschillende paren in de relatie *VolgendeKlinker* $\circ$ *VolgendeMedeklinker*. Geef ook twee verschillende paren in de relatie *VolgendeMedeklinker* $\circ$ *VolgendeKlinker*.
- (d) De beide relaties *VolgendeKlinker*, *VolgendeMedeklinker* blijken functies te zijn (niet aantonen). Zijn deze functies injectief (1-1)? Zijn deze functies totaal? Geef vier ja/nee antwoorden (bijvoorbeeld, in tabelvorm).

3. Partiële ordening

In deze opgave werken we met de verzameling

$$Del\ 42 := \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

(de verzameling van alle delers van 42), en met de relatie *Deelt* in *Del* 42 met voorschrift "*x* is een deler van *y*". Deze relatie is, zoals bekend, een partiële ordening (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (a) Algemene kennis. Wat bedoelt men in het algemeen met het *Hasse diagram* van een partiële ordening " $\leq$ "?
- (b) Geef de relatie *Deelt* in *Del* 42 weer door middel van een Hasse diagram. Kennis en gebruik van het juiste algoritme scoren hoger dan alleen een correct plaatje.
- (c) Neem nu de deelverzameling $A := \{2, 3, 6, 7, 14, 21\}$ van *Del* (42). Heeft *A* een kleinste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen. Als ook deze niet voorkomen, zet dan een streep.
- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Heeft de verzameling *A* een grootste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen. Als ook deze niet voorkomen, zet dan een streep.

4. Equivalentierelaties

De (3-)kubus $\{0, 1\}^3$ bestaat uit alle drietallen van bits (0/1). Een equivalentierelatie *R* ontstaat in de kubus door het volgende voorschrift:

$w_1 R w_2$ precies dan als w_1 en w_2 hetzelfde aantal enen hebben.

(Je hoeft dit niet aan te tonen.)

- (a) Algemene kennis. Gegeven een equivalentierelatie *R* in een verzameling *V*, wat verstaat men precies onder de *equivalentieklasse* $[p]$ van een element $p \in V$?
- (b) Geef voor elk bitrijtje *x* de bijhorende *equivalentieklasse* $[x]$.
- (c) Hoeveel *verschillende* equivalentieklassen zijn er?
- (d) Geef een *volledig representantensysteem* voor de equivalentierelatie *R*.

5. Functies: Tellen en Gelijkmachtigheid

(a) Algemene kennis.

- (i) Wat verstaat men onder een *surjectieve functie* $f: A \rightarrow B$?
- (ii) De n -dimensionale kubus heeft als hoekpunten alle rijtjes van n bits (0/1). Hoeveel hoekpunten heeft een 4-kubus ("Tesseract") precies?
- (iii) Wat verstaat men onder *gelijkmachtige verzamelingen* A, B ?
- (iv) Formuleer de *stelling van Cantor en Bernstein*.

Voor de rest van deze opgave is $V := \{1, \dots, 9\}$ met de natuurlijke telfunctie $x \mapsto x$ ($x = 1, \dots, 9$).

(b) Hoeveel elementen heeft de *machtsverzameling* $\mathcal{P}(V)$?

(c) Zoals bekend is $\mathcal{P}(V)$ gelijkmatig met de 9-kubus (de verzameling van alle rijtjes van 9 bits); in het dictaat en in de opgaven werd gebruik gemaakt van een welbepaalde bijjectie.

- (i) Welke verzameling $A \subseteq V$ correspondeert volgens deze bijjectie aan de bitcode 001001001?
- (ii) Welke bitcode komt overeen met de deelverzameling $\{2, 4, 6, 8\}$ van V ?

6. Inductie en Recursie

(a) Algemene kennis:

- (i) Leg kort uit: hoe bewijst je een uitspraak van de vorm $\forall n P(n)$ over natuurlijke getallen met *natuurlijke inductie*?
- (ii) Zij R een relatie in een eindige verzameling A . Wat bedoelt men met een weergave van de relatie R in *matrixvorm*?
- (iii) Wat bedoelt men met de *transitieve afsluiting* van een (binaire) relatie R ?

(b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^\infty$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

- (i) Bereken de termen t/m t_5 van de rij $(t_n)_{n=2}^\infty$.
- (ii) Bewijs met *inductie* dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.

(c) Gegeven is een verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (de elementen worden ook in deze volgorde gebruikt) en een binaire relatie R in A , beschreven in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (i) Geef de relatie weer als een verzameling van paren $\langle x, y \rangle \in A \times A$.
- (ii) Geef de relatie weer als een *gerichte graaf*.
- (iii) Teken de gerichte graaf van de relaties $R^2 := R \circ R$ en van $R^3 := R^2 \circ R$. Wat is nu de *transitieve afsluiting* van R (weergave naar eigen smaak)?

Normering:

1a	3	2a	4	3a	3	4a	3	5a	4	6a	3	MC	16
1b	4	2b	3	3b	4	4b	4	5b	3	6b	4		
1c	4	2c	3	3c	3	4c	3	5c	6	6c	5		
		2d	3	3d	2	4d	3						
	11		13		12		13		13		12		16

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -3ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder # 10). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra

Leeg blad ten behoeve van apart multiple choice gedeelte

naam, studierichting & jaar:

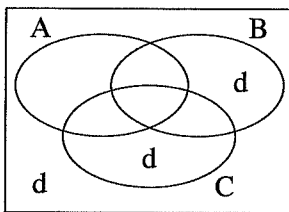
20-12-2011

7. Multiple-choice gedeelte

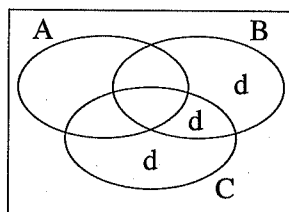
- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Gegeven is een element d en drie verzamelingen A , B , C in een universum, waarbij $d \in A' \cap (B \cup C)$.

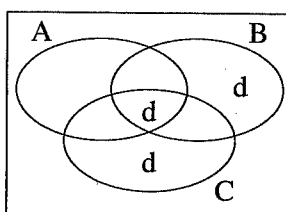
In een Venn-diagram met A , B , C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



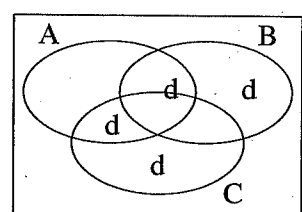
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De binaire relatie *IsGrootmoederVan* kan worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ De samenstelling *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.

M3. Een *minimaal element* p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan:

- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, \neg a \leq p$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A (a \leq p \rightarrow p = a)$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, p \leq a$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, p < a$.

M4. Zij $f: V \rightarrow W$ een totale functie. De binaire relatie xRy in V met voorschrift " $fx = fy$ " is:

- ☐ een totale orderrelatie in V .
- ☐ een stricte orderrelatie in V .
- ☐ een equivalentierelatie in V .
- ☐ -- (geen van deze).

M5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn gegeven vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De *inverse* functie van de *samengestelde* functie $DIV_4 \circ ADD_2$ is:

- o $ADD_2 \circ MUL_4$.
- o $SUB_2 \circ MUL_4$.
- o $DIV_4 \circ SUB_2$.
- o $SUB_2 \circ DIV_4$.

M6. Het recursieve voorschrift voor $fac(n) := n!$ (zogenaamde n -faculteit, $n \geq 1$) is:

- o $fac(1) := 1$ en $fac(n+1) := fac(n) \cdot (n+1)$ (waar $n \geq 1$).
- o $fac(n+1) := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)$ (waar $n \geq 1$).
- o $fac(1) := 1$ en $fac(n) := fac(n+1) / (n+1)$ (waar $n \geq 1$).
- o $fac(1) := 1$ en $fac(n+1) := fac(n) \cdot n$ (waar $n \geq 1$).