

**Opgelet:** er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde(n). Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

**N.B.:** Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

## 1. Verzamelingen en relaties

- (a) Maak een *Venn-diagram* voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Controleer systematisch of de twee verzamelingen gelijk zijn.

$$A \cap (B \cup C)', \quad (A \cap B') \cap (A \cap C').$$

- (b) De volgende gelijkheid is correct:

$$(A \cap B)' \cap (A \cap C)' = A' \cup (B \cup C)'.$$

Controleer deze gelijkheid met behulp van *verzamelingenalgebra*. Geef bij elke stap aan welke wetten je gebruikt en of je de vervangingsregel gebruikt.

**N.B.:** Na de normering vind je een tabel met mogelijk nuttige informatie voor dit onderdeel.

- (c) Zij  $W$  de verzameling van alle mogelijke woorden van lengte 3, gemaakt met de letters 'a', 'b', 'c', 'd', en 'e'. Er mag ten hoogste één klinker in een woord voorkomen. Bepaal het aantal  $\#W$  met de volgende stappen:
- Een duidelijk ontwerp van een partitie van  $W$ .
  - Een telling van elk part.
  - Het eindbedrag  $\#W$ .

## 2. Relaties

- (a) Algemene kennis.

- Wat bedoelt men met een relatie  $R$  in een verzameling  $A$ ?
- Geef een voorbeeld van een relatie in  $\mathbb{N}$  (natuurlijke getallen) die *antisymmetrisch* is en oneindig veel paren getallen bevat.
- Gegeven twee binaire relaties  $R$  en  $S$ , maak de definitie van *samenstelling* af:

$$S \circ R := \{ \langle x, z \rangle : \dots \dots \dots \}.$$

We bekijken verder twee binaire relaties van type  $Mensen \times Dieren$ . De eerste relatie, *Heeft*, heeft als relatievoorschrift:

$x$  *Heeft*  $y$  betekent persoon  $x$  heeft (houdt) dier  $y$ .

De tweede relatie, *ZorgtVoor*, heeft als relatievoorschrift:

$x$  *ZorgtVoor*  $y$  betekent persoon  $x$  zorgt voor dier  $y$ .

- Hoe zeg je in gewone taal (geen verzamelingen-taal) dat  $Heeft \subseteq ZorgtVoor$ ?
- Bekijk nu de volgende concrete gegevens.

| perso(o)n(en)           | dier(en)     |
|-------------------------|--------------|
| An                      | Coco         |
| Bea                     | Minnie, Blub |
| Carl, Eef               | Tweety       |
| Dirk                    | Keffer       |
| de relatie <i>Heeft</i> |              |

| perso(o)n(en)               | dier(en)       |
|-----------------------------|----------------|
| Carl                        | Jumbo          |
| Eef, An                     | Coco           |
| Bea, Eef                    | Minnie, Tweety |
| Bea                         | Blub           |
| de relatie <i>ZorgtVoor</i> |                |

Geef alle paren in de relatie  $Heeft \cap ZorgtVoor$ .

- (d) Is het waar (met de gegevens van onderdeel (c)) dat  $Heeft \subseteq ZorgtVoor$ ? Goede toelichting scoort beter.

### 3. Relaties

- (a) Algemene kennis:
- (i) Aan welke voorwaarden moet een *partiële ordening* voldoen? De namen van deze voorwaarden volstaan.
  - (ii) Wat is een *stricte ordening*?
  - (iii) Wat bedoelt men met een *Hasse diagram* van een partiëel geordende verzameling?
- (b) Neem de verzameling  $Del42 := \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$  (de delers van 42) en de relatie  $x IsDelerVan y$  (een heuse partiële ordening!). Teken het Hasse diagram van deze relatie (je scoort beter als je laat zien dat je het algoritme hiervoor kent).
- (c) Neem nu de deelverzameling  $A := \{2, 3, 6, 7, 14, 21\}$  van  $Del42$ . Geef alle elementen van  $A$  die grootste (resp., maximaal, kleinste, minimaal) zijn.

### 4. Functies

- (a) Welke van de volgende relaties, gepresenteerd in matrixvorm, zijn functies? Geef bij een positief antwoord aan of de functie totaal is of niet. Maak gebruik van de verzamelingen

$$rijnummers := \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$kolomnummers := \{1, 2, 3, 4\},$$

en gebruik een standaardtypering van de vorm

$$rijnummers \times kolomnummers.$$

Hier zijn de relaties.

$$R_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) De  $n$ -kubus bestaat uit "hoekpunten", voorgesteld als een rijtje van  $n$  bits (0/1). Leg uit hoe je een *totale bijectie* maakt tussen de  $n$ -kubus en de machtsverzameling  $\mathcal{P}(V)$  van een  $n$ -punts verzameling  $V$  (denk aan  $V := \{1, 2, \dots, n\}$ ). Uit je verhaal moet duidelijk blijken voor  $n=8$  welk hoekpunt van de kubus correspondeert met de deelverzameling  $\{1, 3\}$  van  $V$  en welke deelverzameling van  $V$  correspondeert met het hoekpunt  $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ .
- (c) We hebben twee verzamelingen  $A := \mathbb{R}$  (reële getallen) en  $B := [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ . Geef twee totale injectieve functies  $f: A \rightarrow B$  en  $g: B \rightarrow A$ . Is een van je functies surjectief? Om welke redenen

zijn de verzamelingen  $A$  en  $B$  wel/niet gelijkmachtig? Goede toelichting scoort beter.

## 5. Inductie en Recursie

(a) Algemene kennis:

- (i) Zij  $R$  een relatie in een eindige verzameling  $A$ . Wat bedoelt men met een weergave van de relatie  $R$  in matrixvorm?
- (ii) Wat is de *derde macht*  $R^3$  van een binaire relatie  $R$ ?
- (iii) Wat bedoelt men met de *transitieve afsluiting* van een (binaire) relatie  $R$ ?

(b) Een rij reële getallen  $(t_n)_{n=2}^{\infty}$  is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

- (i) Bereken de termen t/m  $t_5$  van de rij  $(t_n)_{n=2}^{\infty}$ .
- (ii) Bewijs met *inductie* dat  $t_n = n^2 + n - 2$  voor alle  $n \geq 2$ .

(c) Gegeven is een verzameling  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  (de elementen worden ook in deze volgorde gebruikt) en een binaire relatie  $R$  in  $A$ , beschreven in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (i) Geef de relatie weer als een verzameling van paren  $\langle x, y \rangle \in A \times A$ .
- (ii) Geef de relatie weer als een *gerichte graaf*.
- (iii) Teken de gerichte graaf van de relaties  $R^2$  en van  $R^3$ . Wat is nu de *transitieve afsluiting* van  $R$  (weergave naar eigen smaak)?

## Normering:

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |    |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|----|
| 1a | 5 | 2a | 3 | 3a | 4 | 4a | 4 | 5a | 3 | M  | 18 |
| 1b | 5 | 2b | 4 | 3b | 5 | 4b | 6 | 5b | 5 |    |    |
| 1c | 5 | 2c | 4 | 3c | 5 | 4c | 5 | 5c | 5 |    |    |
|    |   | 2d | 4 |    |   |    |   |    |   |    |    |
| 15 |   | 15 |   | 14 |   | 15 |   | 13 |   | 18 |    |

(Multiple-choice gedeelte: -4 punten per fout)

**Totaal = 90**

**Cijfer = Totaal/10 + 1**

## Wetten van de verzamelingen algebra

---

*Commutativiteit:*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

*Associativiteit:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

*Distributiviteit:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

*Identiteiten:*

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

*Idempotentie:*

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

*Complement:*

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

*DeMorgan's wetten:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

*Involutie:*

$$(A')' = A$$

---

*Vervangingsregel:* [Informatie gewist]

---

naam, studierichting & jaar: --

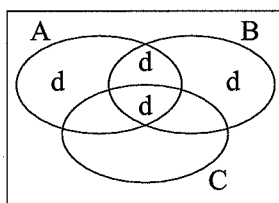
## Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

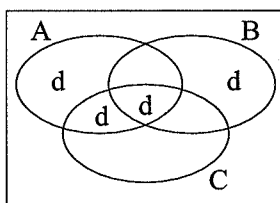
**M1.** Gegeven is een element  $d$  en drie verzamelingen  $A, B, C$  in een universum, waarbij

$$d \in (A \cap B') \cup (B \cap C').$$

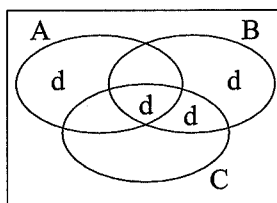
In een Venn-diagram met  $A, B, C$  plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element  $d$  volgens de formule toe kan behoren. Welke van volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



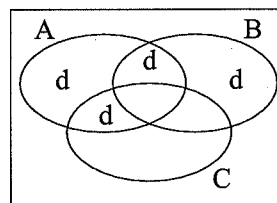
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

**M2.** De binaire relatie *IsKleindochterVan* kan worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsZoonVan*  $\circ$  *IsDochterVan*.
- ☐ De samenstelling *IsDochterVan*  $\circ$  *IsZoonVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsZoonVan*  $\circ$  *IsDochterVan* en *IsDochterVan*  $\circ$  *IsDochterVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsDochterVan*  $\circ$  *IsZoonVan* en *IsDochterVan*  $\circ$  *IsDochterVan*.

**M3.** De relatie  $x$  *IsDelerVan*  $y$  in  $\mathbb{N}$  is

- ☐ Een partiële orderrelatie.
- ☐ Een totale orderrelatie.
- ☐ Een equivalentierelatie.
- ☐ Geen van deze.

**M4.** Is  $V$  een verzameling en  $R$  een equivalentierelatie, dan is de *quotiëntverzameling*  $V/R$

- ☐ De vereniging van alle  $R$ -equivalentieklassen.
- ☐ De doorsnede van alle  $R$ -equivalentieklassen.
- ☐ De partitie van  $V$  in  $R$ -equivalentieklassen.
- ☐ Een volledig representantensysteem van  $R$ .

**M5.** Het principe van (gewone) *inductie met basis*  $b$  is een strategie die een argument met een doel van de vorm  $\forall n \geq b \, P(n)$  omzet in:

- ☐ een werkargument met extra aanname  $n \geq b$  en met het doel  $\forall k (b \leq k < n \rightarrow P(k))$ .
- ☐ een werkargument met extra aanname  $n \geq b$  en met het doel  $P(n)$ .
- ☐ een werkargument met extra aannames  $n \geq b$  en  $P(n)$ , en met het doel  $P(n+1)$ .
- ☐ een werkargument met extra aannames  $n \geq b$  en  $P(n+1)$  en met het doel  $P(n)$ .

