

Faculteit Exacte Wetenschappen

Verzamelingen en Relaties

Vrije Universiteit

Tentamen 21-12-2010

Opgelet: er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

- (a) Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C in een universum van 32 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#A = 11; \#B = 14; \#C = 14,$$

$$\#(A \cap B) = 4; \#(B \cap C) = 5; \#(C \cap A) = 3,$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 1.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van *Venn-diagrammen*:

$$\#(A \cup B \cup C), \#(A' \cap B' \cap C'), \#(B \cap C').$$

- (b) Maak een *Venn-diagram* voor elk van de twee opgegeven formules en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$(A \setminus (B \cup C))', \quad A' \cap (B \cup C).$$

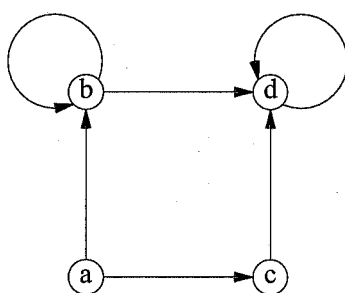
- (c) Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van *verzamelingen-algebra*. Geef daarbij aan waar de *vervangingsregel* werd gebruikt.

$$((A \cap B) \cup C)' = (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$$

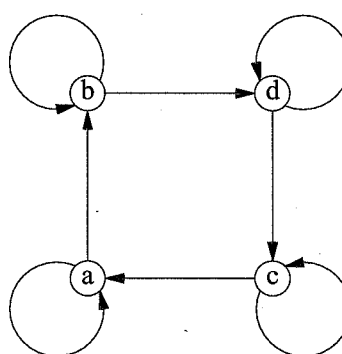
N.B.: na de normering vind je een tabel met wetten uit de verzamelingenalgebra.

2. Relaties

Gegeven zijn twee relaties R, S in de verzameling $\{a, b, c, d\}$ voorgesteld door de volgende gerichte grafen.



gerichte graaf van R



gerichte graaf van S

- (a) Geef van elk van de relaties R en S de voorstelling met 0/1 matrices (gebruik de natuurlijke volgorde $\langle a, b, c, d \rangle$).
- (b) Teken de gerichte grafen horend bij $R \circ S$ en $S \circ R$.
- (c) Geef aan (ja/nee) of de relaties $R \circ S$ en $S \circ R$ reflexief, symmetrisch, en/of transitief zijn.

- (d) Is $R \circ S = S \circ R$? Goede toelichting scoort beter.

3. Partiële ordening

In deze opgave werken we met de verzameling

$$Del\ 30 := \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

(de verzameling van alle delers van 30), en met de relatie *Deelt* in *Del 30* met voorschrift " x is een deler van y ". Deze relatie is, zoals bekend, een partiële ordening (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (a) Algemene kennis.
- (i) Welke zijn de drie kenmerken van een partiële ordening? Geef de namen en de definities.
 - (ii) Wat is een maximaal element van een deelverzameling in een partiële ordening?
 - (iii) Geef in enkele zinnen weer hoe het algoritme werkt om een *Hasse diagram* te maken van een partiële ordening " $\leq$ ".
- (b) Geef de relatie *Deelt* in *Del 30* weer door middel van een Hasse diagram.
- (c) Neem nu de deelverzameling $A := \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$ van *Del (30)*. Heeft A een *kleinste element* volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle *minimale elementen*. Als ook deze niet voorkomen, zet dan een streep.
- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Heeft de verzameling A een *grootste element* volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle *maximale elementen*. Als ook deze niet voorkomen, zet dan een streep.

4. Equivalentierelaties en Functies

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat zijn de drie kenmerken van een *equivalentierelatie*? Geef de namen en de definities.
 - (ii) Wat zijn de drie kenmerken van een *totale bijectie* van type $A \rightarrow B$? Geef de relevante definities.
 - (iii) Formuleer de *stelling van Cantor en Bernstein*.
- (b) Zij W_5 de verzameling van alle 5-letterwoorden en $k: W_5 \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de functie met $k(w) :=$ aantal klinkers in het woord $w \in W$. Er ontstaat een equivalentierelatie R in W_5 met het volgende voorschrift.

$$w_1 R w_2 \text{ betekent: } k(w_1) = k(w_2).$$

- Je hoeft dit niet aan te tonen. Geef een *volledig representantensysteem* voor R en verantwoord je keuze.
- (c) Laat zien dat twee gegeven verzamelingen *gelijkmachtig* zijn. Je hoeft niets aan te tonen, maar geef wel voldoende verantwoording.
- (i) $A := [0, 2)$ en $B := (-1, 3]$ (reële intervallen).
 - (ii) $A := (e, \pi]$ en $B := [0, 1]$ (reële intervallen; $e = 2.7181..$ en $\pi = 3.1415..$ zijn welbekende constanten van de calculus).

5. Inductie en Recursie

(a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=0}^\infty$ is als volgt recursief gedefinieerd.

$$t_1 = 1; \quad t_{n+1} = t_n + n + 1.$$

- (i) Bereken de termen $t_2, \dots, t_6$ van deze rij.
 (ii) Bewijs met *inductie* dat

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geq 1).$$

(b) In de verzameling $V = \{1, 2, \dots, 6\}$ hebben we de volgende binaire relatie R :

$$R := \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 6, 1 \rangle \}.$$

- (i) Geef de relatie en haar kwadraat weer als een *gerichte graaf*.
 (ii) De *transitieve afsluiting* van de relatie R blijkt een equivalentierelatie te zijn. Beschrijf de equivalentieklassen, en vermeld hoeveel verschillende equivalentieklassen er zijn.

Normering:

1a	5	2a	4	3a	3	4a	4	5a	5	MC	20
1b	5	2b	5	3b	5	4b	5	5b	6		
1c	5	2c	5	3c	3	4c	5				
		2d	2	3d	3						
15		16		14		14		11		20	

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -3ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

Het cijfer wordt nadien aangevuld met de behaalde huiswerkbonus.

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Kusus informatie"). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra