

1. Verzamelingen

- (a) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C , waarbij $\#A = 8$, $\#B = 9$, $\#C = 7$. Verder is gegeven dat het universum U 18 elementen heeft en dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = 4; \#(B \cap C) = 3; \#(C \cap A) = 2.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

$$\#(A \cup B \cup C), \#(A' \cap B' \cap C'), \#(U \setminus (B \cup C)).$$

- (b) Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van verzamelingenalgebra. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt en waar je de vervangingsregel gebruikt. Het universum is U .

$$(A \cap B)' \cap (A' \cup B).$$

N.B.: je vindt een tabel met de wetten van verzamelingenalgebra na de normering.

2. Relaties

- (a) Algemene kennis.

(i) Wat betekent het dat twee lijsten *gelijk* zijn? Geef een precies antwoord.

(ii) Wat bedoelt men met een *binaire* relatie?

(iii) Gegeven een relatie R in de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$, wat wordt bedoeld met een *matrix-voorstelling* van R ?

We beschikken voor de rest van deze opgave over de verzamelingen

$$\text{Dagnummers} := \{01, 02, \dots, 31\} \text{ en}$$

$$\text{Maandnummers} := \{01, 02, \dots, 12\}.$$

De verzameling *Data* is de deelverzameling van

$$\text{Dagnummers} \times \text{Maandnummers}$$

die bestaat uit alle werkelijk voorkomende data in 2010. Bekijk nu de relatie

$$\text{KorteTermijn} := \{ \langle d_1, d_2 \rangle : d_1 \in \text{Data}, d_2 \in \text{Data}, d_1 \leq d_2, d_2 - d_1 \leq 14 \text{ dagen} \}.$$

Voorbeeld:

$$\langle 27-01, 05-02 \rangle \in \text{KorteTermijn}, \quad \langle 27-01, 16-02 \rangle \notin \text{KorteTermijn}.$$

- (b) Beantwoord de volgende vragen met ja of met nee; goede toelichting scoort.

(i) Is de relatie reflexief?

(ii) Is de relatie symmetrisch?

(iii) Is de relatie antisymmetrisch?

(iv) Is de relatie transitief?

- (c) Bekijk nu de samengestelde relatie $\text{KorteTermijn} \circ \text{KorteTermijn}$ en geef bij de volgende vragen een ja/nee antwoord met toelichting.

(i) Zij d_1 de datum "01-02-2010" en zij d_2 de datum "28-02-2010". Is

$$\langle d_1, d_2 \rangle \in \text{KorteTermijn} \circ \text{KorteTermijn}?$$

- (ii) Zij d_1 de datum "01-01-2010" en zij d_2 de datum "31-01-2010". Is $\langle d_1, d_2 \rangle \in \text{KorteTermijn} \circ \text{KorteTermijn}$?

3. Ordening

(a) Algemene kennis.

- (i) Gegeven zijn twee verzamelingen met partiële ordening: V_1 met $\leq_1$ en V_2 met $\leq_2$. Werk de definitie uit van de bijhorende *lexicografische ordening* $\leq$ op het Cartesisch product $V_1 \times V_2$:

$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle$ betekent.....

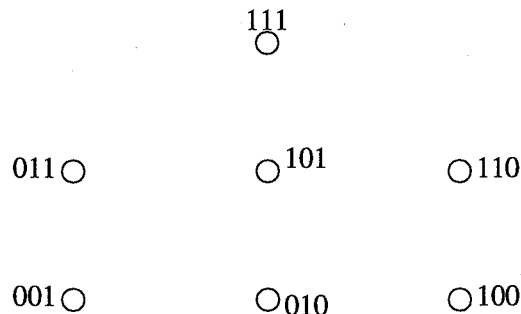
Je mag de definitie afwerken hetzij met woorden, hetzij in "logisch snelschrift".

- (ii) (notatie van (i)) Gegeven dat de beide ordeningen $\leq_1$ en $\leq_2$ totaal zijn, is de bijhorende lexicografische ordening dan totaal?

Voor de rest van deze opgave is gegeven de verzameling $\text{DrieBits} := \{0, 1\}^3$ en de deelverzameling A van alle 3-bit woorden met tenminste één 1. De verzameling $\text{Bits} := \{0, 1\}$ heeft de gebruikelijke ordening met $0 < 1$. De verzameling DrieBits krijgt de Cartesische orde:

$\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \leq \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ betekent $b_1 \leq c_1 \wedge b_2 \leq c_2 \wedge b_3 \leq c_3$.

- (b) Ontwerp een Hasse diagram voor de verzameling A . In de bijgevoegde figuur zijn alle punten zó geplaatst dat het resultaat overzichtelijk blijft. Je scoort beter als blijkt dat je het algoritme kent.



N.B.: Deze figuur is ook opgenomen achterop het multiple choice formulier.

- (c) Welke zijn de *maximale* elementen en welke zijn de *grootste* elementen van A ? Welke zijn de *minimale* elementen en welke zijn de *kleinste* elementen van A ?
- (d) In de lexicografische ordening heeft de deelverzameling A een *kleinste* element. Welk?

4. Equivalentierelaties en Functies

(a) Algemene kennis:

- (i) Wat verstaat men onder de *equivalentieklasse* van een punt p m.b.t. een equivalentierelatie R in een verzameling V ?
- (ii) Wat is het verschil tussen het *bereik* en het *waardengebied* van een getypeerde functie $f: A \rightarrow B$?
- (iii) Wat bedoelt men met een *surjectieve* getypeerde functie $f: A \rightarrow B$?

- (b) We hebben een verzameling $V := \{0, 1, \dots, 9\}$. Er is een relatie R in V met voorschrift:

$x R y$ betekent: $x - y$ is een drievoud.

Feit: R is een equivalentierelatie in V (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (i) Geef de equivalentieklasse van $x := 4$ weer door opsomming.

- (ii) Geef een volledig representantensysteem voor de equivalentierelatie R .
- (c) Laat zien met je favoriete methode dat de verzamelingen
 $A := [-2, 0) \cup (0, 3]$ en $B := [-1, 0) \cup (0, 1]$
 (deelverzamelingen van $\mathbb{R}$) gelijkmatig zijn. Toelichting scoort beter.

5. Inductie en Recursie

- (a) Rijen. Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^\infty$ is als volgt recursief gedefiniëerd.
 $t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$
- (i) Bepaal de termen t_3 t/m t_6 van de rij $(t_n)_{n=2}^\infty$.
- (ii) Bewijs met inductie dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.
- (b) Transitieve afsluiting. Gegeven is een verzameling A met 5 punten en een binaire relatie R in A (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de transitieve afsluiting van R in je favoriete weergave (matrixweergave, tabel of gerichte graaf). Goede toelichting scoort.

Normering:

1a	6	2a	3	3a	3	4a	3	5a	6	MC	23
1b	6	2b	8	3b	5	4b	6	5b	6		
		2c	3	3c	4	4c	4				
				3d	4						
12		14		16		13		12		23	

(Multiple-choice gedeelte: -4 punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Behaald / 10 + 1

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

naam, studierichting & jaar:

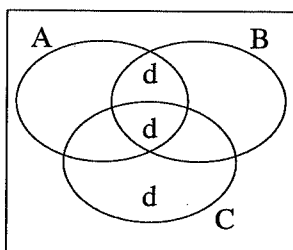
11-02-2010

Multiple-choice gedeelte

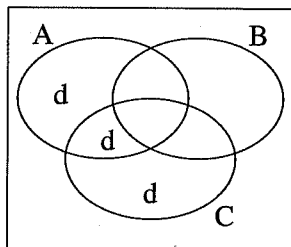
- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Gegeven zijn een element d en drie verzamelingen A , B , C in een universum, waarbij $d \in (A \cup B') \cap C$.

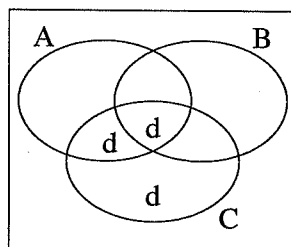
In een *Venn-diagram* met A , B , C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer:



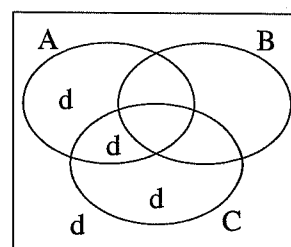
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De *inverse* van de binaire relatie *IsVriendVan* is de relatie

- ☐ *IsVijandVan*.
- ☐ *WasVriendVan*.
- ☐ *IsVriendVan*.
- ☐ *HeeftGeenVrienden*.

M3. De volgende uitspraak over *maximale* en *grootste* elementen in een partiëel geordende verzameling is in alle omstandigheden correct:

- ☐ Een maximaal element van een verzameling is uniek.
- ☐ Een maximaal element van een verzameling is tevens het grootste element.
- ☐ Een grootste element van een verzameling is tevens een maximaal element.
- ☐ Is er maar één maximaal element, dan is dit het grootste element.

M4. Zij R een equivalentierelatie in een verzameling V . Een *volledig representantensysteem* van R is

- ☐ een deelverzameling van V met uit elke R -equivalentieklasse één element.
- ☐ een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse vertegenwoordigd is.
- ☐ een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse ten hoogste één keer vertegenwoordigd is.
- ☐ een partitie van V horend bij de equivalentieklassen van R .

M5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De formule voor de *samengestelde functie*

$DIV_3 \circ SUB_2 \circ MUL_4(x)$ is

- o $(4x - 2)/3$.
- o $4x/3 - 2$.
- o $4(x/3 - 2)$.
- o -- (geen van deze formules is correct).

M6. De *transitieve afsluiting* van een relatie R is:

- o De relatie $R^2 := R \circ R$.
- o De (recursief gedefinieerde) relatie R^n voor zekere $n \geq 2$.
- o De vereniging van de relaties $R^2, R^3, \dots, R^n$ voor zekere $n \geq 2$.
- o De vereniging van de relaties R^n voor alle $n = 2, 3, \dots$

Figuur bij opgave 3b: Hasse diagram

