

Tentamen Verzamelingen en relaties 15-12-2009

Correctie bij de multiple choice vraag M7, 1e regel

De exponent van " -1 " moet worden aangepast (" $n+1$ " in plaats van " n "), anders staat de juiste oplossing niet bij de antwoorden. De verbeterde versie is:

M7. Een rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is *recursief gedefinieerd* door $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + (-1)^{n+1}$ **[HIER]** ($n \geq 0$). De eerste vier elementen van de rij zijn:

- o 1, -2, 1, -2.
- o 1, -2, 3, -4.
- o 1, 0, 1, 0.
- o (...) dit is geen recursief voorschrift; er ontstaat geen rij.

Om vergissingen te vermijden, breng de aangegeven wijziging aan op de tentamenpagina.

Met excuses.

Opgelet: er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

- (a) (Algemene kennis)
- (i) Wat is de *doorsnede* $A \cap B$ van twee verzamelingen A en B ?
 - (ii) Wat is het *complement* A' van een verzameling A in een universum U ?
- (b) Maak een *Venn-diagram* voor elk van de twee opgegeven formules en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?
- $$(A \setminus (B \cap C))', \quad A' \cup (B \cap C).$$
- (c) Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van *verzamelingen-algebra*. Geef daarbij aan waar de *vervangingsregel* werd gebruikt.
- $$(A \cup B)' \cup (A \cup C)' = A' \cap (B \cap C)'.$$

N.B.: Je vindt een tabel met de relevante wetten op p. 4.

2. Relaties

We beschikken over de volgende binaire relatie R in de verzameling $V := \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R := \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}.$$

- (a) Geef de *matrixvoorstelling* van R (rij- en kolomnummers moeten overeenstemmen met de volgorde 1, 2, 3, 4 van de elementen van V).
- (b) Geef de *inverse relatie* R^{-1} weer door opsomming.
- (c) Teken de *gerichte graaf* van de samengestelde relatie $S := R \circ R$.
- (d) Is de relatie S reflexief? Symmetrisch? Antisymmetrisch? Transitief? Toelichting hoeft niet; antwoorden met "ja" of "nee" volstaan.

3. Partiële ordening

In deze opgave werken we met de verzameling

$$Del\,36 := \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

(de verzameling van alle delers van 36), en met de relatie *Deelt* in $Del\,36$ met voorschrift " x is een deler van y ". Deze relatie is, zoals bekend, een partiële ordening (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (a) Algemene kennis. Wat bedoelt men in het algemeen met het *Hasse diagram* van een partiële ordening " $\leq$ "?
- (b) Geef de relatie *Deelt* in $Del\,36$ weer door middel van een Hasse diagram. Kennis en gebruik van het juiste algoritme scoort hoger dan alleen een correct plaatje.
- (c) Neem nu de deelverzameling $A := \{2, 3, 6, 9, 12\}$ van $Del\,(36)$. Heeft A een *kleinste element* volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle *minimale elementen*. Als

ook deze niet voorkomen, zet dan een streep.

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Heeft de verzameling A een *grootste element* volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle *maximale elementen*. Als ook deze niet voorkomen, zet dan een streep.

4. Equivalentierelaties

De kubus $Q_4 := \{0,1\}^4$ bestaat uit alle bitrijen van lengte 4. Een equivalentierelatie R ontstaat in Q_4 door het volgende voorschrift:

$w_1 R w_2$ betekent w_1 en w_2 hebben hetzelfde aantal enen.

(Je hoeft dit niet aan te tonen.)

- (a) Algemene kennis. Gegeven een equivalentierelatie R in een verzameling V .
- (i) Wat verstaat men precies onder de *equivalentieklasse* $[p]$ van een element $p \in V$?
 - (ii) Wat is de *quotientverzameling* V/R en wat is de bijhorende *quotiëntfunctie* $q: V \rightarrow V/R$?
- (b) Geef alle *verschillende* equivalentieklassen van de relatie R in Q_4 .
- (c) Geef een *volledig representantensysteem* voor de equivalentierelatie R .
- (d) Bedenk een (eenvoudige) verzameling V en een functie $f: Q_4 \rightarrow V$ waarmee $f(x) = f(y)$ hetzelfde betekent als $x R y$. Je hoeft niets te bewijzen.

5. Functies: Tellen en Gelijkmachtigheid

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat verstaat men onder een *totale* getypeerde functie?
 - (ii) Wat verstaat men onder *gelijkmachtige verzamelingen* A, B ?
 - (iii) Formuleer de *stelling van Cantor en Bernstein*.
- (b) Laat zien dat twee gegeven verzamelingen gelijkmachtig zijn. Je hoeft niets aan te tonen, maar geef wel voldoende details ter verantwoording.
- (i) $A := [1, 3)$ en $B := (2, 5]$ (reële intervallen).
 - (ii) $A := (\pi, 3.875]$ en $B := [2, 5]$ (reële intervallen; N.B. $\pi = 3,1415\dots$).
- (c) Iemand maakt 1 miljoen verschillende rijtjes van 1 miljoen bits elk, en daagt je uit om nog een nieuw rijtje te vinden. Leg uit hoe je dit eenvoudig voor mekaar krijgt.

6. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis:
- (i) Zij R een relatie in een verzameling A . Er is een rij $(R^n)_{n=1}^\infty$ van "machten" van R . Hoe wordt deze rij recurrent gedefinieerd?
 - (ii) Noem twee eigenschappen die de *transitieve afsluiting* van een (binaire) relatie R altijd heeft.
- (b) Het sorteeralgoritme "Bubble Sort" heeft bij n gegevens ten hoogste t_n sorteerstappen nodig. De recurrente betrekking voor de getallenrij $(t_n)_{n=1}^\infty$ blijkt te zijn
- $$t_1 = 0; \quad t_{n+1} := t_n + n \quad (n \geq 1).$$
- (i) Bereken de termen tot en met t_6 van de rij $(t_n)_{n=1}^\infty$.

(ii) Bewijs met *inductie* dat

$$t_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad (n \geq 1).$$

(c) In de verzameling $A = \{1, 2, \dots, 6\}$ hebben we een binaire relatie R met voorschrift

$$x R y \text{ betekent } |x - y| = 3$$

(het verschil $x - y$ is, in absolute waarde, 3).

(i) Geef de relatie weer als een verzameling van paren $\langle x, y \rangle \in A \times A$.

(ii) Geef de relatie weer als een *gerichte graaf*.

(iii) Teken de gerichte graaf van de relaties $R^2 := R \circ R$ en $R^3 = R^2 \circ R$. Wat is nu de *transitieve afsluiting* van R (weergave naar eigen smaak)?

Normering:

1a	2	2a	4	3a	3	4a	3	5a	3	6a	3	MC	20
1b	4	2b	2	3b	5	4b	4	5b	4	6b	5		
1c	4	2c	3	3c	2	4c	3	5c	4	6c	5		
		2d	2	3d	2	4d	3						
	10		11		12		13		11		13		20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -3ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

Het cijfer wordt nadien aangevuld met de behaalde huiswerkbonus.

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder # 10). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra

naam, studierichting & jaar:

15-12-2009

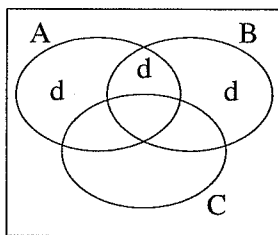
7. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

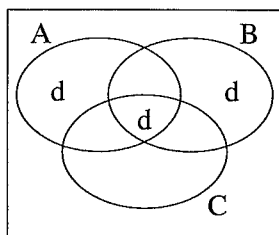
M1. Gegeven is een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij

$$d \in (A \cup B) \cap C'.$$

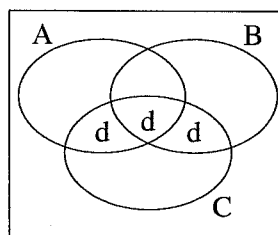
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



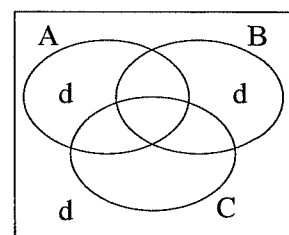
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De samengestelde relatie $IsBroerOfZusVan \circ IsKindVan$ is de relatie

- ☐ $IsHalfBroerOfHalfZusVan$.
- ☐ $IsOomOfTanteVan$.
- ☐ $IsNeefjeOfNichtjeVan$.
- ☐ (...) dit is geen standaard familierelatie.

M3. Een *maximaal element* p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan:

- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, \neg p \leq a$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A (p \leq a \rightarrow p = a)$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, a \leq p$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, a < p$.

M4. De reductie van 25 modulo 11 ...

- ☐ is 25
- ☐ is 14
- ☐ is 3
- ☐ (...) bestaat niet want $25 > 11$.

M5. De binaire relatie $R := \text{VolgendeWerkdag}$ is gegeven door opsomming:

$\{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}$.

Deze relatie is een functie van type $\text{Weekdagen} \rightarrow \text{Weekdagen}$. Bovendien:

- o De functie *VolgendeWerkdag* is 1-1 en surjectief.
- o De functie *VolgendeWerkdag* is 1-1 maar niet surjectief.
- o De functie *VolgendeWerkdag* is niet 1-1 maar wel surjectief.
- o De functie *VolgendeWerkdag* is niet 1-1 en niet surjectief.

M6. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De formule voor de samengestelde functie $DIV_3 \circ SUB_2 \circ MUL_4(x)$ is

- o $(4x - 2)/3$.
- o $4x/3 - 2$.
- o $4(x/3 - 2)$.
- o -- (geen van deze formules is correct).

M7. Een rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is *recursief gedefinieerd* door $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + (-1)^n$ ($n \geq 0$). De eerste vier elementen van de rij zijn:

- o 1, -2, 1, -2.
- o 1, -2, 3, -4.
- o 1, 0, 1, 0.
- o (...) dit is geen recursief voorschrift; er ontstaat geen rij.