

1. Verzamelingen

- (a) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C met (respectievelijk) 7, 8, 9 elementen in een universum U met 20 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 3.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

$$\#(A \cup B \cup C), \#(A' \cap B' \cap C'), \#(U \setminus (A \cup B)).$$

- (b) De volgende gelijkheid is correct:

$$(A \cap B)' \cap (A \cap C)' = A' \cup (B \cup C)'.$$

Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van de verzamelingenalgebra. Geef daarbij stap voor stap aan welke wetten je gebruikt.

2. Relaties

In deze opgave gebruiken we de volgende verzameling.

$$\text{Weekdagen} := \{ma, di, wo, do, vr, za, zo\}.$$

Verder hebben we twee binaire relaties $R := \text{VolgendeWerkdag}$ en $S := \text{Eergisteren}$ in de verzameling *Weekdagen*, gegeven door opsomming:

$$R := \{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

$$S := \{ \langle ma, za \rangle, \langle di, zo \rangle, \langle wo, ma \rangle, \langle do, di \rangle, \langle vr, wo \rangle, \langle za, do \rangle, \langle zo, vr \rangle \}.$$

- (a) Stel de relaties R en S elk apart voor door middel van Venn-diagrammen. (Het multiple choice blad bevat de aanzet voor deze Venn diagrammen.)
- (b) De relatie R is *niet reflexief*, *niet symmetrisch*, en *niet transitief*. Geef voor elk van deze begrippen aan wat er schort.
- (c) Laat zien dat de relaties $R \circ S$ en $S \circ R$ niet dezelfde zijn.

3. Ordening

- (a) Algemene kennis:

- (i) Aan welke voorwaarden moet een *partiële ordening* voldoen? De namen van deze voorwaarden volstaan.
- (ii) Wat bedoelt men met een *Hasse diagram* van een partiël geordende verzameling?

- (b) Neem de verzameling $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ met de Cartesische ordening (uitgaande van de natuurlijke ordening op $\mathbb{Z}$), en de deelverzameling

$$A := \{ \langle x, y \rangle : 1 \leq x, 1 \leq y, 3 \leq x+y \leq 5 \}.$$

Teken een Hasse diagram met de elementen van A . Je scoort beter als blijkt dat je het algoritme hiervoor kent.

- (c) (vervolg onderdeel (b)). Heeft A een *grootste element*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen van A .
- (d) (vervolg onderdelen (b) en (c)). Heeft A een *kleinste element*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen van A .

4. Functies en equivalentierelaties

- (a) Algemene kennis:
- (i) Wat is het verschil tussen het *domein* en het *definitiegebied* van een getypeerde functie $f: A \rightarrow B$?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *totale* getypeerde functie $f: A \rightarrow B$?
 - (iii) Wat verstaat men onder de *equivalentieklasse* van een punt p m.b.t. een equivalentierelatie R in een verzameling V ?

In de volgende onderdelen is $A := \{ 'a', 'b', 'c', 'd', 'e' \}$ en $V := A \times A$. Elke letter in A heeft een waarde, namelijk, $'a':1, 'b':2, 'c':3, 'd':4, 'e':5$. Gegeven is de getypeerde functie

$$\text{waarde} : V \rightarrow \{ 1, 2, \dots, 10 \}$$

met het volgende functievoorschrift. Voor $x \in V$ is $\text{waarde}(x)$ de som van de letterwaarden van de letters in x .

Bijvoorbeeld, $\text{waarde}("ab") = 1+2=3$.

- (b) Is deze functie totaal? Is deze functie surjectief? Goede toelichting scoort.
- (c) Zij R de equivalentierelatie in V met voorschrift

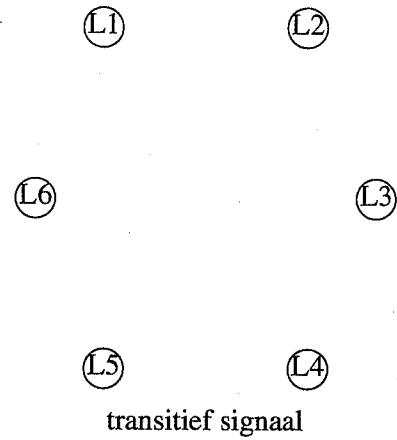
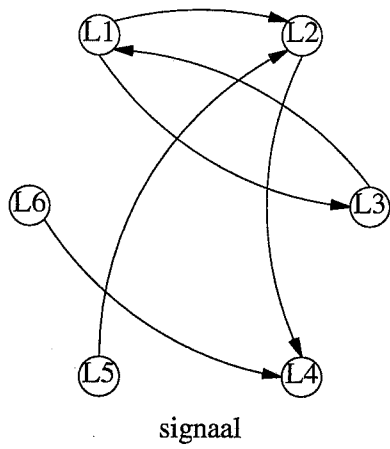
$$xRy \Leftrightarrow \text{waarde}(x) = \text{waarde}(y).$$

Beschrijf de *equivalentieklassen* van "aa" en van "ac" door opsomming.

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft de relatie R ? Geef daarbij een volledig representantensysteem van R . Je scoort beter als je methodisch werkt.

5. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis.
- (i) Leg uit: *het principe van (gewone) inductie*. Je mag het antwoord geven in de vorm van een tabel of met woorden.
 - (ii) Gegeven een (binaire) relatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: *de transitieve afsluiting* van R ? Je mag een formule geven of een verbale omschrijving.
- (b) Een rij natuurlijke getallen k_n voor $n \geq 0$ wordt als volgt *recursief gedefinieerd*.
- $$k_0 := 1, k_{n+1} := 3 \cdot k_n + 2 \cdot 3^{n+1}.$$
- (i) Bereken de termen k_1, k_2, k_3 .
 - (ii) Toon aan met (gewone) inductie naar $n \geq 0$ dat $k_n = (2n+1) \cdot 3^n$.
- (c) In een netwerk met locaties $\{L_1, \dots, L_6\}$ is er een "signaal" relatie S , waar xSy betekent dat een signaal kan worden verstuurd van locatie x rechtstreeks naar locatie y . De relatie S is concreet gegeven in de volgende gerichte graaf. Laat *Strans* de transitieve afsluiting zijn van S . Vul in het rechterplaatje de gerichte graaf in, die correspondeert met *Strans*.
- N.B.:** Deze figuur is ook opgenomen achterop het multiple choice formulier. Je kan deze voor je antwoord gebruiken.



Normering:

1a	6	2a	4	3a	4	4a	3	5a	4	MC	20
1b	6	2b	6	3b	6	4b	3	5b	5		
		2c	4	3c	3	4c	4	5c	5		
				3d	3	4d	4				
12		14		16		14		14		20	

(Multiple-choice gedeelte: -3punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Behaald / 10 + 1

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

naam, studierichting & jaar:

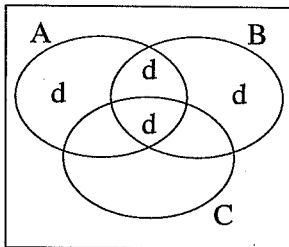
18-02-2009

Multiple-choice gedeelte

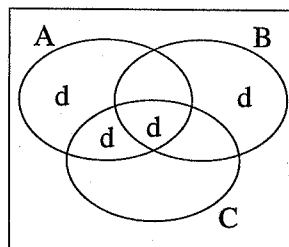
- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Gegeven zijn een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij $d \in (A \cap B') \cup (B \cap C')$.

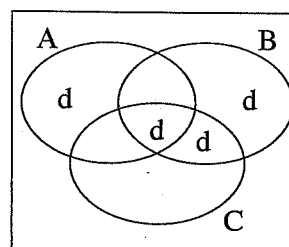
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



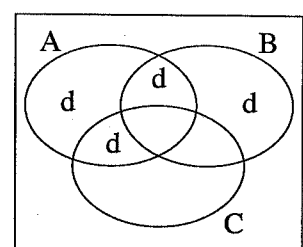
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De personenrelatie *IsKleinZoonVan* kan best worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling $\text{IsZoonVan} \circ \text{IsDochterVan}$.
- ☐ De samenstelling $\text{IsDochterVan} \circ \text{IsZoonVan}$.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties $\text{IsDochterVan} \circ \text{IsZoonVan}$ en $\text{IsZoonVan} \circ \text{IsZoonVan}$.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties $\text{IsZoonVan} \circ \text{IsDochterVan}$ en $\text{IsZoonVan} \circ \text{IsZoonVan}$.

M3. Een *maximaal element* p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan $p \in A$ en:

- ☐ $\forall a \in A \neg p \leq a$.
- ☐ $\forall a \in A (p \leq a \rightarrow p = a)$.
- ☐ $\forall a \in A (a \leq p)$.
- ☐ $\forall a \in A (a < p)$.

M4. Zij R een equivalentierelatie in een verzameling V . Een *volledig representantensysteem* van R is

- ☐ een deelverzameling van V met uit elke R -equivalentieklasse één element.
- ☐ een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse vertegenwoordigd is.
- ☐ een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse ten hoogste één keer vertegenwoordigd is.
- ☐ een partitie van V horend bij de equivalentieklassen van R .

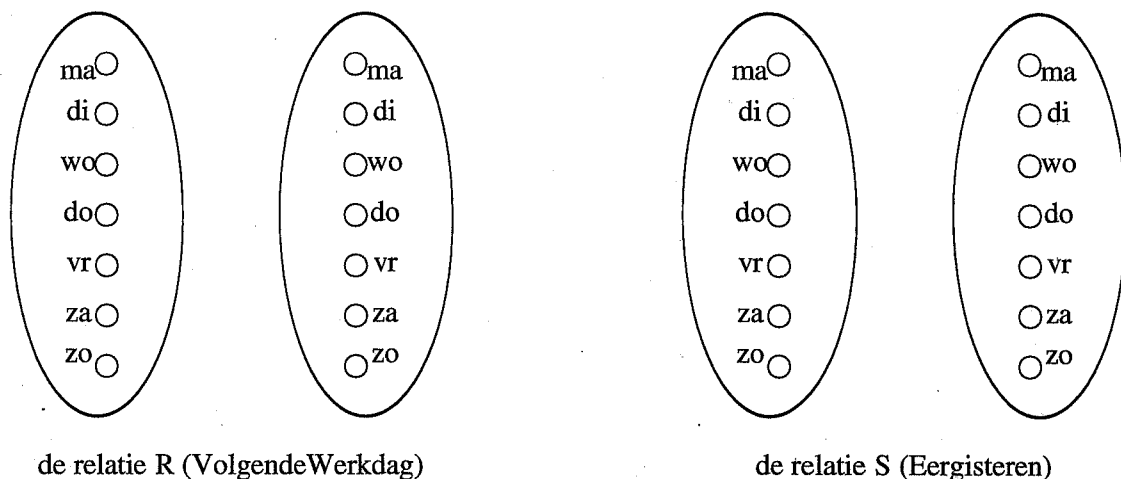
M5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven: ADD_a , SUB_a , MUL_a ,

DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De formule voor de samengestelde functie $DIV_3 \circ SUB_2 \circ MUL_4(x)$ is

- o $(4x - 2)/3$.
- o $4x/3 - 2$.
- o $4(x/3 - 2)$.
- o -- (geen van deze formules is correct).

M6. Het *recursieve voorschrift* voor $f(n) := n!$ (n -faculteit, $n \geq 1$) is $f(1) := 1$ (basis) en verder:

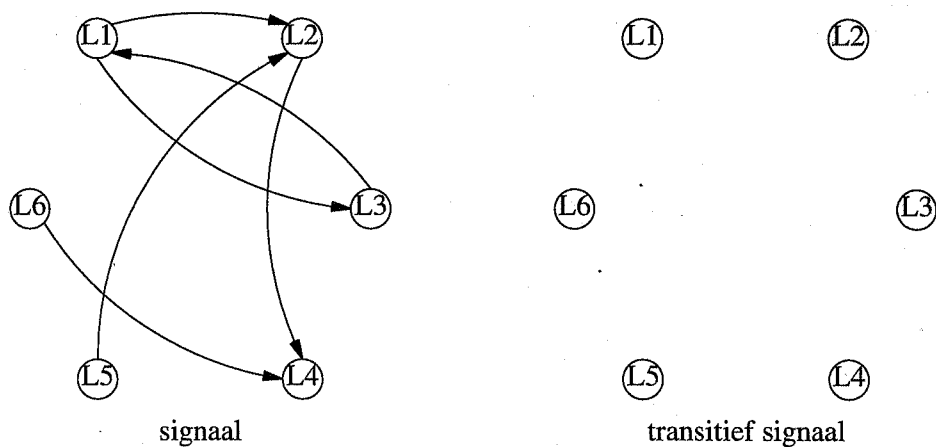
- o $f(n) := f(n+1) \cdot n$.
- o $f(n+1) := f(n) \cdot n$.
- o $f(n+1) := f(n) \cdot (n+1)$.
- o $f(n+1) := f(n) + (n+1)$.



de relatie R (VolgendeWerkdag)

de relatie S (Eergisteren)

Figuur bij opgave 2(a): voorstelling van relaties



Figuur bij opgave 5(c): Transitieve afsluiting.